1 Erweiterung der Analysis I

1.1 Kurvenscharen

1.1.1 Einleitendes Beispiel

Wir betrachten die 4 Parabeln

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$
$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$
$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$
$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$

und untersuchen in 2 Gruppen ihre NSTn:

Gruppe 1 (±3)	Gruppe 2 (±2)
$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 0$	$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$
$x^2 + 2x + 12 = 0$	$x^2 + 2x + 8 = 0$
$x_{01,02} = -1 \pm \sqrt{1 - 12}$ k. L.	$x_{01,02} = -1 \pm \sqrt{1 - 8}$ k. L.
$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$	$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$
$x^2 + 2x - 12 = 0$	$x^2 + 2x - 8 = 0$
$x_{01,02} = -1 \pm \sqrt{1 + 12} = -1 \pm \sqrt{13}$	$x_{01,02} = -1 \pm \sqrt{1 + 8} = -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3$
$x_{01} = -1 - \sqrt{13} \approx -4{,}606$	$x_{01} = -4$
$x_{02} = -1 + \sqrt{13} \approx 2{,}606$	$x_{02} = 2$
Probe nach Vieta:	Probe nach Vieta:
$x_{01} + x_{02} = -p$; $x_{01} \cdot x_{02} = q$	$-4 + 2 = -2$
$-4{,}606 + 2{,}606 = -2$	$-4 * 2 = -8$
$-4{,}606 * 2{,}606 = -12$	

Tafelskizze der Kurvenschar (s. Grafik nächste Seite)

Um eine mathematische Untersuchung (z. B. Anzahl der NST, Lage des Scheitelpunktes) nicht für jede Funktion wiederholen zu müssen, fasst man alle Funktionen zu einer **Scharfunktion** zusammen, indem man für die veränderbare letzte Zahl (das ‚c') einen freien Parameter u einsetzt:

$f(x;u) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + u$ (Schilling: $f_k(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + k$)

Ggf. ist neben dem Definitionsbereich der Funktion (bez. x) auch noch der Wertebereich des **Scharparameters** u anzugeben, z. B.:

$D_f = \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$.

Diese Angaben nehmen wir standardmäßig an. Wir werden sie daher nicht ständig wiederholen.

Wiederholung der anderen Mengen:

ℕ: natürliche Zahlen (0, 1, 2, 3…), aber ℕ* ohne die Null;

ℤ: ganze Zahlen (0, ±1, ±2, ±3…), aber ℤ* ohne die Null;

ℚ: rationale Zahlen (Brüche ganzer Zahlen), ℚ* ohne die Null;

ℝ: reelle Zahlen, wieder ℝ* ohne Null.

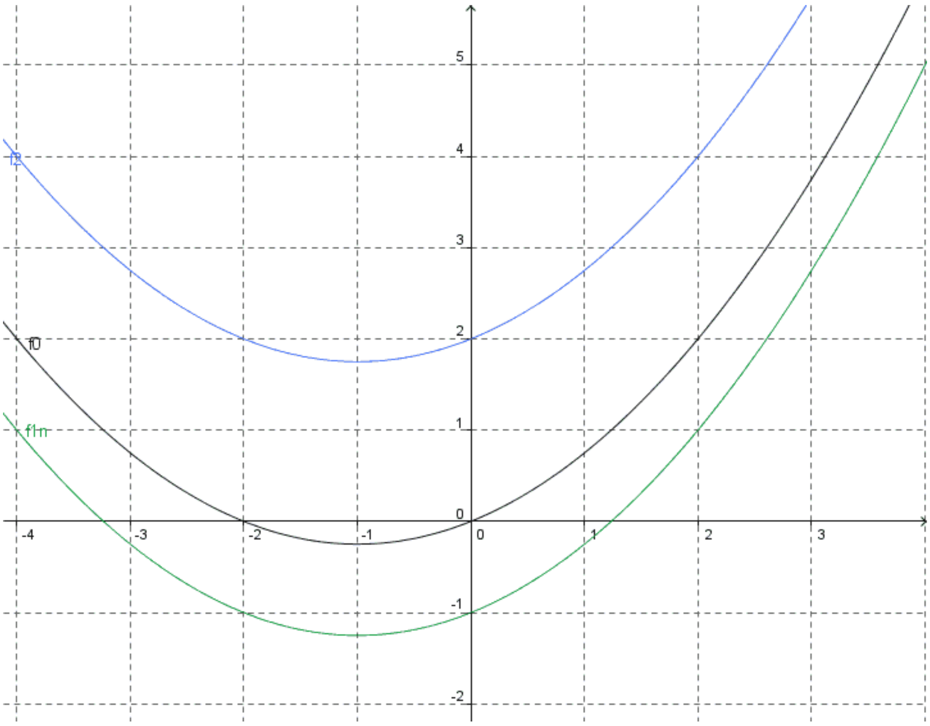
Was bewirkt u im Graphen der Funktion?

u=0: $f(x;0) = {}^1/_4x^2 + {}^1/_2x$

u > 0: nach oben verschoben: $f(x;2) = 1/4x^2 + 1/2x + 2$ usw.

u < 0: nach unten verschoben: $f(x;-1) = 1/4x^2 + 1/2x - 1$ usw.

u ist im Graphen als Achsenschnittpunkt erkennbar!



Zu den bisherigen Fragestellungen (Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte, Wende- und Sattelpunkte) kommen nun Fragestellungen hinzu, die sich auf den Scharparameter beziehen. Bezogen auf das obige Beispiel etwa:

a) Für welche u-Werte hat die Parabel 0|1|2 Nullstellen?

b) Welcher Wertebereich ergibt sich in Abhängigkeit von u?

c) Wo (auf welcher Kurve) liegen alle Scheitelpunkte der Schar (sog. Ortskurve)?

Zu a: Bestimmung der NST:

${}^1/_4x^2 + {}^1/_2x + u = 0 \quad | \cdot 4$

$x^2 + 2x + 4u = 0 \quad | \; p = 2; -{}^p/_2 = -1; q = 4u$

$x_{01;02} = -1 \pm \sqrt{1 - 4u}$

Diskriminante Null setzen (Grenzfall):

$1 - 4u = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 4u \quad \Rightarrow \quad u = {}^1/_4$

Fallunterscheidung:

1. $u = {}^1/_4$: 1 doppelte NST: $x_{01,02} = -1$ (Berührstelle)
2. $u > {}^1/_4$: $D < 0 \Rightarrow$ keine NST
3. $u < {}^1/_4$: 2 NST: $x_{01;02} = -1 \pm \sqrt{1 - 4u}$

Beispielhafte Werte:

u	x_{01}	x_{02}
${}^1/_4$	-1	-1
${}^1/_8$	$-1-\sqrt{{}^1/_2} \approx -1{,}707$	$-1+\sqrt{{}^1/_2} \approx -0{,}2929$
0	-2	0
$-{}^3/_4$	-3	1

Zu b: Wertebereich

Lage des Scheitelpunkts $SchP(x_S|y_S)$:

Bekannt ist: $x_S = -1$ $(=-{}^p/_2)$

$y_S = f(-1;u) = {}^1/_4 - {}^1/_2 + u = -{}^1/_4 + u$

Somit erhalten wir: $SchP(-1|-{}^1/_4 + u)$

Damit können wir auch den Wertebereich der Funktion angeben:

$W_f = [-{}^1/_4 + u;\infty)$

Mit den Beispielwerten ergibt sich

u	W_f
${}^1/_4$	$[0;\infty)$
${}^1/_8$	$[-{}^1/_8;\infty)$
0	$[-{}^1/_4;\infty)$
$-{}^3/_4$	$[-1;\infty)$

Zu c: Ortskurve des Scheitelpunkts

Alle Scheitelpunkte liegen auf einer senkrechten Geraden $x = -1$.

Der Term $-p/2$ einer quadratischen Gleichung ist zugleich auch die x-Koordinate des Scheitelpunkts der Parabel.

Hausaufgabe 1

Untersuchen Sie die Parabel $f(x;u) = {}^1/_2x^2 - 2x + u$ daraufhin, bei welchen u-Werten keine NST, eine NST oder zwei NSTn auftreten (und welche das sind). Beispielhafte Werte für u=1; 0; -2,5.

Lösung:

u=1: ;

u=0: ; u=-2,5: ;

Bei der Besprechung darauf eingehen, dass die x-Koordinate des Scheitelpunkts bereits bekannt ist, nämlich das –p/2 Glied aus der quadratischen Gleichung, also $x_s = 2$. Einsetzen ergibt y_s:

$y_s = f(2;u) = {}^1/_2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + u = 2 - 4 + u = -2+u$

Scheitelpunkt: SchP(2|-2+u)

Für die 3 beispielhaften Werte:

u=1: SchP(2|-1); u=0: SchP(2|-2); u=-2,5: SchP(2|-4,5)

Bestimmung des Scheitels mit Hilfe der Ableitung:

$f'(x;u) = x - 2$ | u ist wie eine Konstante zu behandeln!

$x - 2 = 0 \Rightarrow x_s = 2$

Übungsaufgabe: Bestimmen Sie den Scheitelpunkt mit Hilfe der quadratischen Gleichung und die Nullstellen, sofern möglich:

a) $f(x) = {}^1/_2x^2 + 2x - 2,5$

kann übersprungen werden

$\quad {}^1/_2x^2 + 2x - 2,5 = 0 \quad | \cdot 2$

$\quad x^2 + 4x - 5 = 0 \quad | \; p=4, -p/2=-2; q=-5 \Rightarrow x_s = -2$

$\quad x_{01,02} = -2 \pm \sqrt{4 - (-5)} = -2 \pm 3$

$\quad x_{01} = -5; x_{02} = 1$

$\quad y_s = {}^1/_2(-2)^2 + 2(-2) - 2,5 = -4,5 \Rightarrow$ SchP(-2|-4,5)

b) $f(x) = 3x^2 - x + 2$

$\quad 3x^2 - x + 2 = 0 \quad | :3$

$\quad x^2 - {}^1/_3x + {}^2/_3 = 0 \quad | \; p=-{}^1/_3; -p/2 = {}^1/_6 = x_s; q = {}^2/_3$

$\quad x_{01,02} = {}^1/_6 \pm \sqrt{1/36 - 2/3}$ nicht lösbar

$\quad y_s = 3({}^1/_6)^2 - {}^1/_6 + 2 = {}^{23}/_{12} = 1\,{}^{11}/_{12} \Rightarrow$ SchP(${}^1/_6$|$1\,{}^{11}/_{12}$)

Der Scheitelpunkt lässt sich immer bestimmen, auch wenn die Wurzel nicht gezogen werden kann!

Praktische Beispiele von Kurvenscharen:

- Wirksamkeit eines Medikaments als Funktion der Dosis, Parameter ist die Tageszeit der Einnahme (10:00h am günstigsten);
- Wirksamkeit eines Medikaments als Funktion der Dosis; Parameter ist die Blutgruppe (A, B, AB und 0);
- Strahlungsintensität eines schwarzen Körpers als Funktion der Wellenlänge, Parameter ist die Temperatur des Körpers (Folie aus der Atomphysik);
- Kollektor-Emitter-Strom eines Transistors als Funktion der Kollektor-Emitter-Spannung, Parameter ist der Basisstrom (Folie Ausgangskennlinie).

1.1.2 Zweites Beispiel mit Parameter im linearen Glied

$f(x;u) = x^2 + ux + 2{,}25$

Geometrische Bedeutung von u als Steigung im Achsenschnittpunkt erklären (D:\ownfiles\bzm\zeitlos\BOS\Mathe\Parabel1.ggb).

a) Wir untersuchen die Anzahl der NSTn,

b) die Lage des Scheitelpunkts und

c) die Ortskurve des Scheitelpunkts.

Zu a:

$x^2 + ux + 2{,}25 = 0 \qquad | \; p = u; \; -p/2 = -u/2; \; q=2{,}25$

$x_{01,02} = -u/2 \pm \sqrt{u^2/4 - 2{,}25}$

Der Radikand wird auch **Diskriminante** genannt.

Lösbarkeitsbedingung: $D = u^2/4 - 2{,}25 \geq 0$

Ziehe nie die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl! Ebenso die 4., 6. usw. Wurzel, d. h. alle geraden Wurzeln.

Wir betrachten zuerst den Grenzfall, dass das Gleichheitszeichen gilt. Dann gibt es nur eine NST:

$u^2/4 - 2{,}25 = 0 \qquad | \cdot 4$

$u^2 - 9 = 0$

$u^2 = 9$

$u = \pm 3$ oder $|u| = 3$

Es gibt eine Nullstelle $x_{01} = -u/2 = \begin{cases} -1{,}5 & \text{wenn } u=3 \\ 1{,}5 & \text{wenn } u=-3 \end{cases}$

Z. B. u=3: $f(x;3) = x^2 + 3x + 2{,}25$

$x_{01,02} = -1{,}5 \pm \sqrt{9/4 - 2{,}25} = -1{,}5$ (=x_s und y_s=0, SchP(-1,5|0))

Größerzeichen:

$u^2 > 9 \Rightarrow |u| > 3$, folglich

$u > 3$ oder $u < -3$ es gibt dann 2 NST,

z. B. u=-5: $f(x;-5) = x^2 -5x + 2{,}25$

$x_{01,02} = 2{,}5 \pm \sqrt{25/4 - 2{,}25} = 2{,}5 \pm 2,$

$x_{01} = 0{,}5$; $x_{02} = 4{,}5$

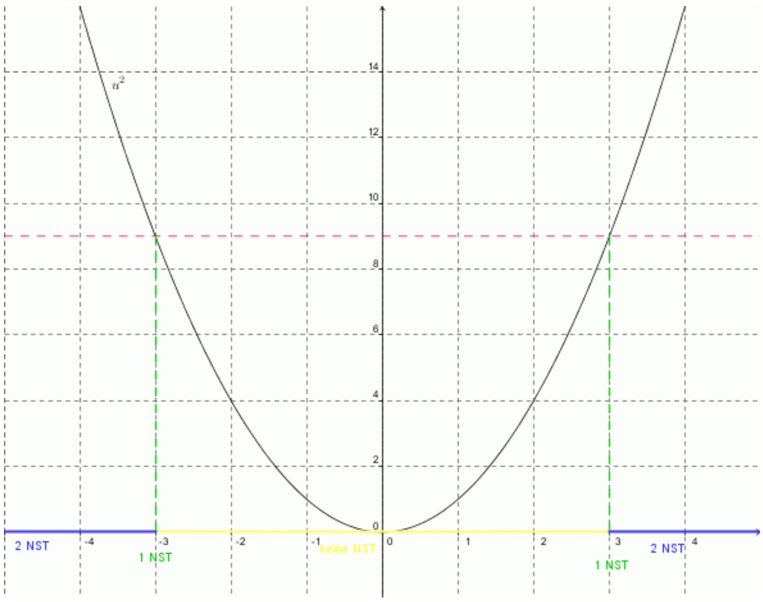
$x_s = 2{,}5$, $y_s = 2{,}5^2 -5\cdot 2{,}5 + 2{,}25 = -4$, SchP(2,5|-4)

sonst (d. h. $u^2 < 9$) gibt es keine NST.

Z. B. u=1: $f(x;1) = x^2 + x + 2{,}25$

$x_{01,02} = -1/2 \pm \sqrt{{}^1/_4 - 2{,}25}$ nicht lösbar, aber $x_s = -{}^1/_2$ und
$y_s = (-{}^1/_2)^2 + (-{}^1/_2) + 2{,}25 = 2$, SchP($-{}^1/_2$|2)

Veranschaulichung der Parameterwerte am Zahlenstrahl.



Hausaufgabe 2

Für welche u-Werte haben die beiden Funktionen $g(x) = {}^1/_2 x - 2$ und $f(x;u) = 4x^2 + 16{,}5x + u$ keine gemeinsamen Punkte?

Lösung: ;

;

;

;

;

;

Zu b: Lage des Scheitelpunkts

x-Koordinate des Scheitelpunkts: $x_s = -u/2$

y-Koordinate durch Einsetzen:

$f(-u/2;u) = (-u/2)^2 + u(-u/2) + 2,25 = u^2/4 - u^2/2 + 2,25 =$

$-u^2/4 + 2,25$

$SchP(-{}^{u}/_{2}|-u^2/4 + 2,25)$

Z. B. $u = -1$: $x_s = {}^{1}/_{2}$; $y_s = -(-1)^2/4 + 2,25 = -{}^{1}/_{4} + 2,25 = 2$
$SchP({}^{1}/_{2}|2)$

Z. B. $u=-2$: $x_s = 1$; $y_s = -1 + 2,25 = 1,25$; $SchP(1|1,25)$

Z. B. $u=25$: $x_s = -12,5$; $y_s = -25^2/4 + 2,25 = -156,25 + 2,25 = -154$
$SchP(-12,5|-154)$

Zu c: Ortskurve des Scheitelpunkts

Gesucht ist die Funktion $y_s(x_s)$.

Aus $x_s = -u/2$ folgt: $u = -2x_s$

Einsetzen in $f(x;u)$ **für u**:

$y_s = f(x_s;-2x_s) = x_s^2 + (-2x_s)\cdot x_s + 2,25 = x_s^2 - 2x_s^2 + 2,25 = -x_s^2 + 2,25$

Ortskurve des Scheitelpunkts:

$y_s(x_s) = -x_s^2 + 2,25$

Probe:

$y_s({}^{1}/_{2}) = -({}^{1}/_{2})^2 + 2,25 = 2$ (≙ $u=-1$, s. o.) ✓

$y_s(1) = -1^2 + 2,25 = 1,25$ (≙ $u=-2$, s. o.) ✓

$y_s(-12,5) = -12,5^2 + 2,25 = -154$ (≙ $u=25$, s. o.) ✓

Ortskurve des Scheitelpunktes bestimmen:
Die Gleichung für x_S nach u auflösen.
Diesen Term in die Funktion für u einsetzen (und $x = x_S$ setzen).

Demo mit Geogebra (Kurve_bsp2.ggb)?

1.1.3 Kurvendiskussion mit einer Scharfunktion

Schilling S. 367 Nr. 1: Untersuchen Sie die gegebene Funktionenschar $f(x;u) = (x-u)^2 + u/2$ allgemein auf

a) Definitionsbereich und Symmetrie,

b) Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs,

c) Schnittpunkte mit den Achsen,

d) Extrempunkte,

e) Wendepunkte,

f) Wertebereich und

g) zeichnen Sie die Graphen der Schar für $u \in \mathbb{Z}$, $|u| \leq 3$.

Zur Wiederholung: Ein Term der Form (x-u) bedeutet grafisch eine Verschiebung in x-Richtung nach rechts (u>0) oder links (u<0).

Zu a: Definitionsbereich

D = $\mathbb{R}$, Symmetrie liegt nicht vor außer für u = 0 (Achsensymmetrie)

Zu b: Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

Meint hier $x \to \pm\infty$. Parabel nach oben geöffnet $\Rightarrow f(x;u) \to \infty$.

Zu c: Schnittpunkte mit den Achsen

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0;u) = (-u)^2 + u/2 = u^2 + u/2 = u(u + \frac{1}{2})$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$(x-u)^2 + u/2 = 0 \quad | - u/2$

$(x-u)^2 = -u/2 \quad | \sqrt{}$

$x-u = \pm\sqrt{-u/2} \quad | +u$

$x = u \pm \sqrt{-u/2}$

NST treten nur für $u \leq 0$ auf.

Zu d: Extrempunkte

Parabel in Scheitelpunktform. Übungshalber soll hier der Scheitelpunkt mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmt werden.

Bed.: $f'(x;u) = 0$ und $f''(x;u) \neq 0$

f' bilden wir mit Hilfe der Kettenregel, *nicht* ausmultiplizieren:

Substitution: $z = x-u \quad {}^{dz}/_{dx} = 1$ (innere Abl.)

Beim Ableiten wird der Parameter u wie eine Konstante behandelt. Gleiches gilt auch beim Integrieren.

$f(z;u) = z^2 + u/2$

${}^{df}/_{dz} = 2z$ (äußere Abl.)

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 2z \cdot 1$$

Rücksubstitution:

$f'(x;u) = 2(x-u)$

$x-u = 0 \Rightarrow \mathbf{x_s = u}$

2. Ableitung:

$f''(x;u) = 2 > 0$ ✓

Es liegt ein Minimum vor.

Einsetzen:

$f(u;u) = (u-u)^2 + u/2 = u/2 \Rightarrow$ **TP(u|u/2)**

Zu e: Wendepunkte

Bed.: $f''(x;u) = 0$ und $f'''(x;u)$

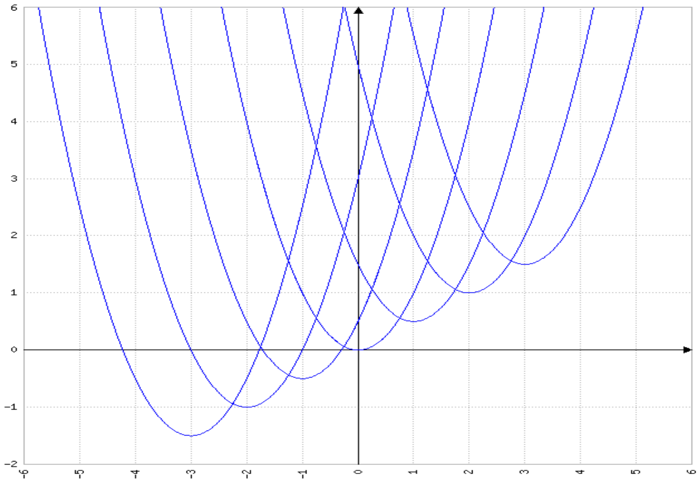
Keine Wendepunkte, da $f''(x;u) = 2 \neq 0$.

Zu f: Wertebereich

$W = [u/2; \infty)$

Zu g: Zeichnung

Geht gut mit www.mathe-fa.de



Hausaufgabe 3

Berechnen Sie beispielhafte Werte wie unter g angegeben zu den Punkten c, d und f. Benutzen Sie die Tabellenform.

Lösung:

u	f(0;u)	x_{01}	x_{02}	x_s	y_s	W

u	f(0;u)	x_{01}	x_{02}	x_s	y_s	W

Hausaufgabe 4

Bestimmen Sie zu der ÜA aus dem Unterricht die Ortskurve der Scheitelpunkte.

Lösung: $x_s = u$:

.

Hausaufgabe 5

Führen Sie eine Kurvendiskussion durch für die Funktion
$f(x;u) = 2x^2 + ux$. Zeichnung (Punkt g) für $u = 0$; ± 2 und ± 4.

Lösung:

a) Definitionsbereich: ;

b) Verhalten an den Rändern des Definitionsber.: ;

c) Schnittpunkte mit den Achsen:

mit der y-Achse: ;

mit der x-Achse:

;

;

;

Probe machen lassen durch Einsetzen von x_{02}:

= 0

d) Extrempunkte:

oder durch Ableitung:

$\Rightarrow$

oder mit 2. Ableitung:

.

= .

.

e) Wendepunkte: .

f) Wertebereich: ;

g) Zeichnung:

Bei der Besprechung die Ortskurve der Scheitelpunkte berechnen lassen:

x_s = Einsetzen in f(x;u):

;

.

AB Ortskurve bestimmen A1

1.1.4 Kurvendiskussion mit einer kubischen Parabel

$f(x;u) = x^3 + ux + 2$

a) Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$.
Symmetrie ist nicht vorhanden!

b) Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

$f(x;u) \to \infty$ für $x \to \infty$; $f(x;u) \to -\infty$ für $x \to -\infty$.

Hausaufgabe 6

Untersuchen Sie das Verhalten von Polynomen mit ungeradem Grad wenn x gegen Unendlich bzw. $-\infty$ strebt. Unterscheiden Sie dabei die Fälle, dass der höchste Koeffizient (a) positiv bzw. negativ ist.

c) Schnittpunkte mit den Achsen

mit der y-Achse:

$f(0;u) = 2$

mit der x-Achse: nicht bestimmbar. Nur für u=0 lassen sich Lösungen finden:

$x^3 + 2 = 0$

$x^3 = -2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2} \approx -1{,}26$

Hausaufgabe 7

Wie viele NST kann ein Polynom 3. Grades mindestens bzw. höchstens haben? Versuchen Sie zu verallgemeinern auf ein beliebiges Polynom mit ungeradem Grad.

d) Extrempunkte:

$f'(x;u) = 3x^2 + u$

$3x^2 + u = 0 \qquad | : 3$

$x^2 + u/3 = 0$

$x^2 = -u/3 \Rightarrow x_e = \pm\sqrt{-u/3}$

Extrema können nur auftreten, wenn $u \le 0$ ist.

Art des Extremums mit der 2. Ableitung prüfen:

$f''(x;u) = 6x$

Fallunterscheidung:

1. $u < 0$

$x_e > 0$ (Plus-Zeichen): $\Rightarrow f''(x_e;u) = 6x_e > 0 \Rightarrow$ TP

$x_e < 0$ (Minus-Zeichen): $\Rightarrow f''(x_e;u) = 6x_e < 0 \Rightarrow$ HP

2. $u = 0$

$x_e = 0 \Rightarrow f''(x_e;u) = 6x_e = 0$

3. Ableitung bilden:

$f'''(x;u) = 6$

$f'(x_e;u)=0$ und $f''(x_e;u)=0$ und $f'''(x_e;u)\neq 0 \Rightarrow$ Es liegt ein Sattelpunkt (SP) vor.

Funktionswerte:

oder mit der Substitutionstechnik

für $x_e = +\sqrt{-u/3}$:

$f(\sqrt{-u/3}\,;u) = (\sqrt{-u/3}\,)^3 + u\cdot\sqrt{-u/3} + 2 =$

$\sqrt{-u/3}\,(\sqrt{-u/3}^{\,2} + u) + 2 = \sqrt{-u/3}\,(-u/3 + u) + 2 =$

${}^2/_3 u\sqrt{-u/3} + 2$

$TP(\sqrt{-u/3}\,|\,{}^2/_3 u\sqrt{-u/3} + 2)$

Z. B. $u = -3$: $x_e = \sqrt{1} = 1$

$f(1;-3) = 1^3 + (-3)\cdot 1 + 2 = 0 \Rightarrow TP(1|0)$

für $x_e = -\sqrt{-u/3}$:

$f(x_e;u) = (-\sqrt{-u/3}\,)^3 - u\cdot\sqrt{-u/3} + 2 = -\sqrt{-u/3}^{\,3} - u\cdot\sqrt{-u/3} + 2 =$

$-\sqrt{-u/3}\,(\sqrt{-u/3}^{\,2} + u) + 2 = -\sqrt{-u/3}\,(-{}^u/_3 + u) + 2 = -{}^2/_3 u\sqrt{-u/3} + 2$

$HP(-\sqrt{-u/3}\,|\,-{}^2/_3 u\sqrt{-u/3} + 2)$

Z. B. $u = -3$: $x_e = -1$

$f(-1;-3) = (-1)^3 + (-3)\cdot(-1) + 2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow HP(-1|4)$

Sonderfall: $u=0$

Dann ist $x_e = 0$.

$f(0;0) = 2$ (s. Punkt c) $\Rightarrow SP(0|2)$

Hausaufgabe 8

Bestimmen Sie die Ortskurve der Tiefpunkte!

Lösg.: $y_{TP}(x) =$;

e) Wendepunkte

$f''(x;u) = 6x$

$6x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_w = 0$

$f'''(x;u) = 6 > 0 \Rightarrow$ es liegt ein RL-Wendepunkt vor.

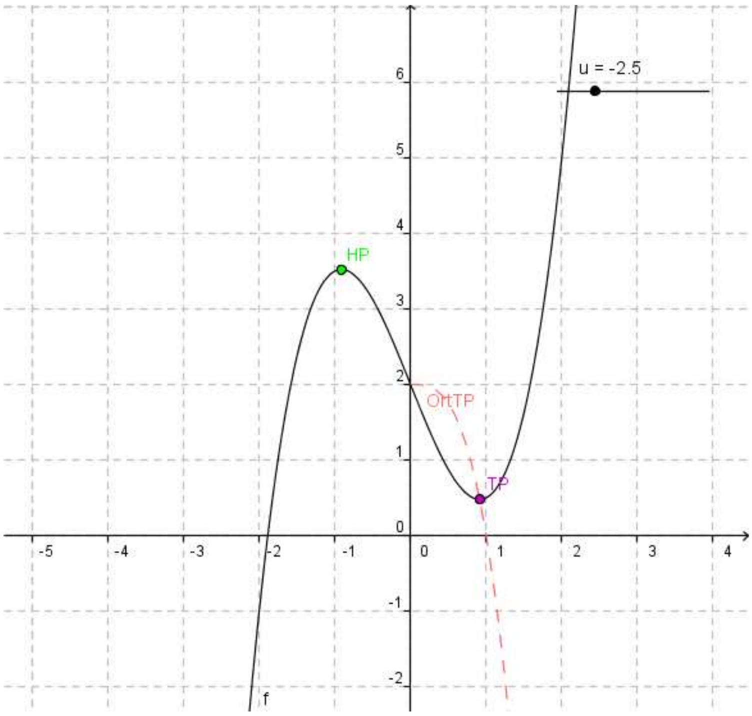
$f(x_w;u) = 2$

WP(0|2) ist bereits als Sattelpunkt erkannt.

f) Wertebereich

$W = \mathbb{R}$

g) Zeichnung für u=-3 ins Heft (NST: -2 raten)



1.1.5 Kostenfunktion mit Parameter

Es sei eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion gegeben durch
$K(x;u) = {}^{1}/_{36}x^3 - {}^{u}/_{3}x^2 + 72x + 3600$

x: Produktionsmenge (z. B. 1000 Stück Autoreifen)

Kapazitätsgrenze: $x_{max} = 92$

Wertebereich für u: $0 \leq u \leq 10$

K(x;u): Kosten in 1000€

Gesucht: Betriebsminimum (BM) und kurzfristige Preisuntergrenze (kPug) sowie die Ortskurve dieses Punktes.

Wiederholung:

Fixkosten:	$K_f(x) = 3600$
variable Kosten:	$K_v(x;u) = {}^{1}/_{36}x^3 - {}^{u}/_{3}x^2 + 72x$
Grenzkosten:	$K'(x;u) = {}^{1}/_{12}x^2 - {}^{2}/_{3}ux + 72$

Legt man die Kosten auf eine produzierte Einheit (1 Reifen) um, erhält man

Stückkosten:	$k(x;u) = K(x;u)/x = {}^{1}/_{36}x^2 - {}^{u}/_{3}x + 72 + 3600/x$

fixe Stückkosten: $k_f(x) = K_f(x)/x = 3600/x$

variable Stückkosten: $k_v(x;u) = K_v(x;u)/x = {}^1/_{36}x^2 - {}^u/_3x + 72$

Der Punkt (BM|kPug) ist definiert als Minimum der variablen Stückkosten. Alternativ kann er auch als Schnittpunkt der Grenzkosten und der variablen Stückkosten bestimmt werden. Wir bestimmen ihn jetzt nach der **ersten** Methode.

$k_v(x;u)$ stellt eine nach oben geöffnete Parabel dar ⇒ es gibt ein Minimum.

Nullsetzen:

${}^1/_{36}x^2 - {}^u/_3x + 72 = 0 \qquad | \cdot 36$

$x^2 - 12ux + 2592 = 0 \qquad | \; p = -12u; \; -p/2 = 6u$

$x_s = 6u = BM$

Einsetzen in $k_v(x;u)$:

$k_v(6u;u) = {}^1/_{36}(6u)^2 - {}^u/_3(6u) + 72 = u^2 - 2u^2 + 72 = -u^2 + 72 = kPug$

z. B. $u = 7$: $x_s = 42 = BM$; $kPug = -7^2 + 72 = -49 + 72 = 23$

Im Allgemeinen erhalten wir: **(BM|kPug) = (6u|-u² + 72)**

Ortskurve des Punktes:

$u = x_s/6$ einsetzen in $k_v(x;u)$:

$$k_v(x_s;x_s/6) = {}^1/_{36}x_s^2 - \frac{x_s}{6} * \frac{x_s}{3} + 72 = {}^1/_{36}x_s^2 - {}^1/_{18}x_s^2 + 72 = -{}^1/_{36}x_s^2 + 72$$

$y_s(x_s) = -{}^1/_{36}x_s^2 + 72$

Probe: $y_s(42) = -{}^1/_{36} \cdot 42^2 + 72 = 23$ ✓

Hausaufgabe 9

Zeichnen Sie die Schar der variablen Stückkosten für u=0 bis 7 in Einerschritten. Als zweite Funktion stellen Sie die Ortskurve des Punktes (BM|kPug) dar. x-Bereich von 0 bis 100. Kleben Sie die Grafik in Ihr Heft ein.

Lösung: Grafik (Kostenfkt2-1-4-diag.png, mit mathe-fa erzeugt):

Zusatzfrage: Bei welchem u-Wert weist die K_v-Kurve einen Sattelpunkt (SP) auf? Praktisch kommt dieser Fall nicht vor. Es ist der Grenzfall zu den Kurven mit Extrema.

Kennzeichnend für einen Sattelpunkt ist ein Extremum in der 1. Ableitung (hier ein Minimum), das auf der x-Achse liegt. Die 1. Ableitung hat folglich eine doppelte NST.

Bed.: $f'' = 0$
$f''' \neq 0$ und
$f' = 0$ (Wendepunkt mit horizontaler Tangente)

$K_v(x;u) = {}^1/_{36}x^3 - {}^u/_3x^2 + 72x$

$K_v'(x;u) = {}^1/_{12}x^2 - {}^2/_3ux + 72$ (Grenzkosten, s. o.)

$K_v''(x;u) = {}^1/_6x - {}^2/_3u$ | Nullsetzen

${}^1/_6x - {}^2/_3u = 0$ | $+ {}^2/_3u$

${}^1/_6x = {}^2/_3u$ | $\cdot 6$

$x_w = 4u$ Wendestelle

$K_v'''(x;u) = {}^1/_6 \neq 0$ ✓

NST in den Grenzkosten an der Stelle x_w berechnen:

$K_v'(4u;u) = {}^1/_{12}(4u)^2 - {}^2/_3u(4u) + 72 = {}^{16}/_{12}u^2 - {}^8/_3u^2 + 72 =$

$-{}^4/_3u^2 + 72 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow$

${}^4/_3u^2 = 72$

$u^2 = 54$

$u = \pm\sqrt{54} = \pm\sqrt{6*9} = \pm 3\sqrt{6} \approx \pm 7{,}348$

Die negative Lösung scheidet aus, da $0 \leq u \leq 10$ vorgegeben war, also:

$u = 3\sqrt{6}$

Das zeigt auch, dass der ursprüngliche Wertebereich für u zu groß gewählt war. Es hätte genauer heißen müssen: $0 \leq u < 3\sqrt{6}$.

$x_w = 4u = 12\sqrt{6} \approx 29{,}39$

y-Wert durch Einsetzen in $K_v(x;u)$, zunächst nur mit u:

$K_v(4u;u) = {}^1/_{36}(4u)^3 - \frac{u}{3}(4u)^2 + 72\cdot 4u =$

${}^{64}/_{36}u^3 - {}^{16}/_3u^3 + 288u = ({}^{16}/_9 - {}^{48}/_9)u^3 + 288u =$

$-{}^{32}/_9u^3 + 288u = 32u(-{}^1/_9u^2 + 9)$

Jetzt einsetzen $u = 3\sqrt{6}$:

$K_v(12\sqrt{6}\,;3\sqrt{6}\,) = 32\cdot 3\sqrt{6}\,(-{}^1/_9(3\sqrt{6}\,)^2 + 9) =$

$96\sqrt{6}\,(-{}^1/_9(9\cdot 6) + 9) =$

$96\sqrt{6}\,(3) = 288\cdot\sqrt{6} \approx 705{,}45$

Sattelpunkt: **SP($12\sqrt{6}$ |$288\cdot\sqrt{6}$)**

Hausaufgabe 10

Setzen Sie übungshalber die gefundenen Werte $u = 3\sqrt{6}$ und $x_w = 12\sqrt{6}$ in die Grenzkostenfunktion ein und bestimmen Sie das Ergebnis ohne TR. Zeichnen Sie auch die Grenzkosten für $u = 3\sqrt{6}$ und x = 0 bis 100.

Lösung: $K_v'(x;u) = =$

.

Dieser Fall tritt praktisch jedoch nicht auf, die Grenzkosten sind immer positiv.

Hausaufgabe 11

Bestimmen Sie das Betriebsminimum der Kostenfunktion $K(x;u) = x^3/4 - u \cdot x^2 + 3072x + 219615$, wobei $40 \le u \le 50$, und die zugehörige kurzfristige Preisuntergrenze. Berechnen Sie den Punkt (BM|kPug) für die Parameterwerte u=41,5; 43,5 und 45,5. Bestimmen Sie ferner die Ortskurve des Punktes (BM|kPug). Machen Sie auch die Probe.

Lösung:

;

.

.

=

;

;

:

.

.

.

.

;

=

.

: ✓

Hausaufgabe 12

Es sei $f(x;u) = {}^1/_6x^3 - ux^2 + {}^3/_2x + {}^8/_3$. Geben Sie die Bedingung für u an, so dass f keine Extremstellen aufweist.

Lösung: ;

!

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

.

1.2 Integralrechnung

1.2.1 Mittelwert einer Funktion

Der Mittelwert $\bar{f}$ einer Funktion f(x) im Intervall [a;b] ist definiert als

Formel 1: $\bar{f} = \int_a^b f(x)dx \,/(b-a)$

Das Rechteck $\bar{f} * (b-a)$ hat dann die gleiche Fläche wie das Integral.

Der Mittelwert einer Funktion f(x) im Intervall [a;b] ist durch $\bar{f} = \int_a^b f(x)dx \,/(b-a)$ gegeben.

Beispiel: Wie groß ist der Mittelwert der Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ im Intervall [-2;2]?

Lösung:

$$\bar{f} = \int_{-2}^{2}(-x^2 + 4)dx \,/4$$

Wir lösen zuerst das Integral:

$$\int_{-2}^{2}(-x^2 + 4)dx = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2} = \tfrac{16}{3} - (-\tfrac{16}{3}) = \tfrac{32}{3} = 10\tfrac{2}{3}$$

$$\bar{f} = \frac{10\,{}^{2}/_{3}}{4} = \tfrac{8}{3} = 2\tfrac{2}{3}$$

Geometrische Deutung als Rechteck an der Tafel.

Hausaufgabe 13

Bestimmen Sie den Mittelwert der Funktion $-2x^2 + x + 10$ im Intervall [-3;5]!

Lösung: ;

;

;

.

Das 2. Beispiel behandelt eine verkettete Funktion. Dabei lernen wir die Technik der Integration durch Substitution kennen.

Beispiel: $f(x) = 3(^1/_2x - 2)^5$ im Intervall [3;6]

Die Klammer wird jetzt NICHT ausmultipliziert, sondern gleich z gesetzt: $z = {}^1/_2x - 2$

$f(z) = 3z^5$

Diese Funktion lässt sich leicht integrieren:

$\int 3z^5\, dz = {}^1/_2z^6$

Beim Ableiten würden wir noch mit der inneren Ableitung multiplizieren. Dies müssen wir jetzt ausgleichen, indem wir beim Integrieren durch die innere Ableitung teilen!

$\frac{dz}{dx} = {}^1/_2$

Rücksubstitution:

$F(x) = \int 3(^1/_2x - 2)^5\, dx = \frac{1}{^1/_2}\, {}^1/_2(^1/_2x - 2)^6 = (^1/_2x - 2)^6$

$\int_3^6 f(x)\, dx = \left[(^1/_2x - 2)^6\right]_3^6 = 1 - {}^1/_{64} = {}^{63}/_{64}$

$\bar{f} = \frac{^{63}/_{64}}{3} = {}^{21}/_{64} = 0{,}328125$

Diese Technik funktioniert jedoch nur mit einer **linearen** inneren Funktion!!!

Hausaufgabe 14

Beweisen Sie die Richtigkeit der Gleichung

$\int 3(^1/_2x - 2)^5\, dx = (^1/_2x - 2)^6$ durch Ableiten!

Integration durch Substitution:

Das Integral $\int f(mx + b)\, dx$ wird durch die Substitution $z = mx + b$ gelöst.

Ist $F(z)$ eine Stammfunktion von $f(z)$, so ist $\frac{1}{m} F(mx + b)$ eine Stammfunktion von $f(mx + b)$.

Hausaufgabe 15

Bilden Sie die Stammfunktion (Probe durch Ableiten):

a) $f(x) = 12\cdot(-3x + \sqrt{3}\,)^{3,5}$ b) $f(x) = (2x - \pi/6)^6$

Lösung:

a) ;

I.

b) ;

.

1.2.1.1 Anwendung auf Scharfunktionen

Ebenso wie beim Ableiten tritt auch beim Integrieren der Scharparameter in der Stammfunktion wieder auf. Beispiel:

Berechne den Mittelwert der Funktion $f(x;u) = \frac{1}{4}x^2 + ux$ mit $0 \le u \le 12$ im Intervall [1;4].

Wir bilden zuerst die Stammfunktion:

$F(x;u) \stackrel{\text{def}}{=} \int(\frac{1}{4}x^2 + ux)dx = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}ux^2 + C$

Zähler:

$\int_1^4 f(x;u)\, dx = F(4;u) - F(1;u)$

$F(4;u) = \frac{64}{12} + 8u = \frac{16}{3} + 8u$

$F(1;u) = \frac{1}{12} + \frac{1}{2}u$

$F(4;u) - F(1;u) = \frac{16}{3} + 8u - (\frac{1}{12} + \frac{1}{2}u) =$

$\frac{16}{3} - \frac{1}{12} + 8u - \frac{1}{2}u = 5\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2}u$

Nenner:

$b-a = 4-1 = 3$

$\bar{f} = (5\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2}u)/3 = 1{,}75 + 2{,}5u$

Beispielhafte Werte:

u	$\bar{f}$
0	1,75
2,5	8
5	14,25

Wann ergibt sich ein Mittelwert von 5?

$5 = 1{,}75 + 2{,}5u$

$3{,}25 = 2{,}5u \Rightarrow \boxed{u = 1{,}3}$

Übungsaufgabe: Bestimmen Sie den Mittelwert der Funktion $f(x;u) = \frac{1}{10}x^3 - ux^2$ im Intervall [-2;3]!

$\bar{f}(u) = \int_{-2}^{3}(\frac{1}{10}x^3 - ux^2)dx\ /5$

Stammfunktion:

$F(x;u) = \frac{1}{40}x^4 - \frac{1}{3}ux^3$

$F(3;u) = \frac{81}{40} - 9u;\ F(-2;u) = \frac{16}{40} + \frac{8}{3}u$

$F(3;u) - F(-2;u) = {}^{81}/_{40} - {}^{16}/_{40} - 9u - {}^{8}/_{3}u = 1^{5}/_{8} - 11^{2}/_{3}u$

$b-a = 5$

$\bar{f} = (1^{5}/_{8} - 11^{2}/_{3}u)/5 = {}^{13}/_{40} - 2^{1}/_{3}u$

Beispiele:

u	$\bar{f}$
0	${}^{13}/_{40}=0{,}325$
1	$-2^{1}/_{120}\approx -2{,}0083$
-1	$2^{79}/_{120} \approx 2{,}6583$P

Wann ist $\bar{f}$ Null?

${}^{13}/_{40} - 2^{1}/_{3}u = 0 \Rightarrow u = {}^{39}/_{280} \approx 0{,}1393$

Hausaufgabe 16

Es sei die Kostenfunktion $K(x;u) = {}^{1}/_{20}x^3 + ux^2 + 17^{1}/_{15}x + 432$ gegeben. Berechnen Sie die Durchschnittskosten im Intervall [10;12]. Beispielwert für u = -1,5.

Lösung: =

=

.

.

Beispiel: .

1.2.2 Volumen eines Rotationskörpers

Einführende Beispiele nach Schilling S. 423.

Herleitung der Formel nach Schilling S. 426 und Folie.

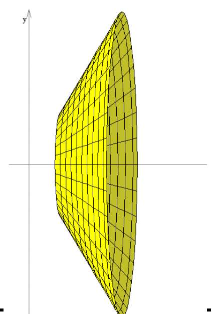
Formel 2: $V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$

Beispiel (nach Aufg. 1 aus Schilling S. 427): $f(x) = \sqrt{x}$ mit a=0 und b=2. Durch die Rotation entsteht ein sog. Paraboloid. Das Volumen dieses Paraboloids ergibt sich aus

$$V = \pi\cdot\int_0^2 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\cdot\int_0^2 x\, dx = \pi\cdot{}^{1}/_{2}\left[x^2\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}(2^2 - 0) = \frac{\pi}{2}\cdot 4 = 2\pi.$$

Übungsaufgabe: Schilling S. 428 Nr. 1a

Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse über dem angegebenen Intervall rotiere um die x-Achse. Zeichne den entstandenen Rotationskörper und bestimme sein Volumen.



Schilling S. 428 Nr. 1a

a) $f(x) = 2x$ Intervall [1;3]

Lösung: $y^2 = 4x^2$

allgemein: $V = \pi\cdot\int 4x^2\,dx = \pi\cdot{}^4/_3x^3 = {}^1/_3\pi\, x(2x)^2 = {}^1/_3\pi\, xy^2$

$y \mathrel{\hat=} r;\ x \mathrel{\hat=} h \Rightarrow V = {}^\pi/_3r^2h$ Kegelvolumen

im Intervall [1;3]:

$V = \pi\cdot{}^4/_3\,[x^3]_1^3 = \pi\cdot{}^4/_3(27-1) = \pi\cdot{}^{104}/_3 = \pi\cdot 34\,{}^2/_3 \approx 108{,}91$ FE.

Hausaufgabe 17

Zeichnen Sie den Rotationskörper und berechnen Sie sein Volumen:

$f(x) = x^2 - 1$ im Intervall [-1;1].

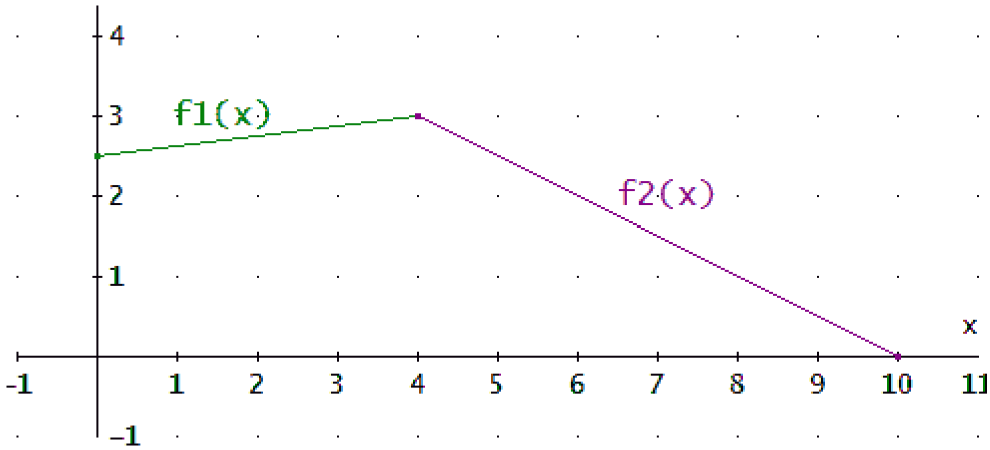
Lösung:

;

.

.

Übungsaufgabe: Es ist das Volumen des Rotationskörpers zu berechnen, der die folgende Berandung hat:



Aus der Grafik werden die beiden Funktionen bestimmt:

$f_1(x) = {}^1/_8x + 2{,}5$ mit D = [0;4] und

$f_2(x) = -{}^1/_2x + 5$ mit D = [4;10]

Um eine geschlossene Darstellung der gesamten Funktion f(x) zu erhalten, benutzt man eine sog. **abschnittsweise definierte Funktion** (ADF):

$$f(x) = \begin{cases} {}^1/_8x + 2{,}5 & \text{für } 0 \le x \le 4 \\ -{}^1/_2x + 5 & \text{für } 4 \le x \le 10 \end{cases} \quad \text{mit } D = [0;10]$$

An der Stelle 4 hat die Funktion einen Knick. Mathematiker sagen dafür: f(x) ist an der Stelle 4 **stetig** (aber nicht stetig differenzierbar).

Anmerkung: Beim Übergang von f_1 zu f_2 an der Stelle a sind drei Fälle möglich:

Unterschiedliche Funktionswerte: $f_1(a) \neq f_2(a)$
Die Funktion macht an der Stelle a einen Sprung. Mathematische Ausdrucksweise: f ist an der Stelle a ***unstetig****. In der Grafik wird durch einen Punkt deutlich gemacht, welcher Wert an der Stelle a gelten soll. Z. B.*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x + 2{,}5 \text{ für } 0 \leq x \leq 4 \\ -\frac{1}{2}x + 6 \quad \text{für } 4 < x \leq 10 \end{cases}.$$

Gleiche Funktionswerte: $f_1(a) = f_2(a)$. Die Funktion hat an der Stelle a einen Knick, da die Steigungen links und rechts von a unterschiedlich sind. Folglich ist f an der Stelle a nicht differenzierbar. Mathematische Ausdrucksweise: f ist an der Stelle a ***stetig****.*

Gleiche Funktionswerte und gleiche Steigungen: $f_1(a) = f_2(a)$ und $f'_1(a) = f'_2(a)$. Der Graph der Funktion erscheint dann an der Nahtstelle a ***glatt****. Mathematische Ausdrucksweise: f ist an der Stelle a* ***stetig differenzierbar****.*

Berechnung des Volumens:

$$V = \pi \int_0^{10} (f(x))^2\, dx = \pi \left(\int_0^4 \left(\tfrac{1}{8}x + 2{,}5\right)^2 dx + \int_4^{10} \left(-\tfrac{1}{2}x + 5\right)^2 dx\right)$$

1. Integral ($0 \leq x \leq 4$):

$(\frac{1}{8}x + 2{,}5)^2 = \frac{1}{64}x^2 + \frac{5}{8}x + 6\frac{1}{4}$

$$\int_0^4 \left(\tfrac{1}{8}x + 2{,}5\right)^2 dx = \int_0^4 \left(\tfrac{1}{64}x^2 + \tfrac{5}{8}x + 6\tfrac{1}{4}\right) dx =$$

$$\left[\tfrac{1}{192}x^3 + \tfrac{5}{16}x^2 + 6\tfrac{1}{4}x\right]_0^4 = 30\tfrac{1}{3}$$

Berechnung mit dem TR Casio fx-991 DE PLUS:

4 STO X

$\frac{1}{192} * X^3 + \frac{5}{16} * X^2 + 6\frac{1}{4} * X =$

Ausgabe: $30\frac{1}{3}$ STO M

2. Integral ($4 \leq x \leq 10$):

$(-\frac{1}{2}x + 5)^2 = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 25$

$$\int_4^{10} \left(-\tfrac{1}{2}x + 5\right)^2 dx = \int_4^{10} \left(\tfrac{1}{4}x^2 - 5x + 25\right) dx =$$

$$\left[\tfrac{1}{12}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 25x\right]_4^{10}$$

Berechnung mit dem TR:

10 STO X

$\frac{1}{12}X^3 - \frac{5}{2}X^2 + 25X =$

Ausgabe: $83\frac{1}{3}$ STO A

4 STO X

$^1/_{12}X^3 - {}^5/_2X^2 + 25X =$

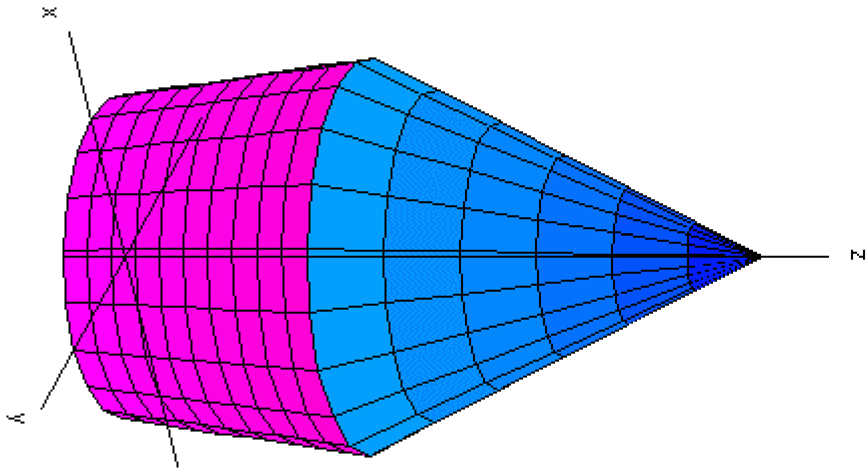
Ausgabe: $65^1/_3$ A - Ans = 18

M+

$M = 48^1/_3$

Ergebnis:

$V = \pi \cdot 48^1/_3 \approx 151{,}84$ VE



Hausaufgabe 18

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch 2 lineare Funktionen durch die Punkte $P_1(0|4)$, $P_2(3|4)$ und $P_3(8|1)$ berandet ist. Geben Sie dazu auch die Gesamtfunktion mit Definitionsbereich an. Skizzieren Sie auch den Rotationskörper.

Lösung:

.

Übungsaufgabe: Berechnen Sie das Volumen einer parabolisch geschliffenen Linse. Liegt ihr Mittelpunkt im Koordinatenursprung, so hat der Rand im 1. Quadranten die Funktion

$f_1(x) = 9\text{ cm} \cdot \sqrt{0{,}64\text{cm} - x}$.

a) Überlegen Sie sich den Definitions- und Wertebereich dieser Funktion.

b) Geben Sie die Funktionen mit D und W für die übrigen Quadranten an (f_2, f_3, f_4).

c) Berechnen Sie das Volumen der Linse.

Lösung:

a) D = [0; 0,64cm]; W = [0; 7,2cm]

b) $f_2(x) = 9\text{ cm}\cdot\sqrt{0{,}64 + x}$ mit $D = [-0{,}64\text{cm}; 0\text{cm}]$ u. $W=[0; 7{,}2\text{cm}]$
$f_3(x) = -f_2(x)$ mit $D = [-0{,}64\text{cm}; 0\text{cm}]$ u. $W=[-7{,}2\text{cm}; 0]$
$f_4(x) = -f_1(x)$ mit $D = [0; 0{,}64\text{cm}]$ u. $W=[-7{,}2\text{cm}; 0]$

c) $V_r = \pi\cdot \int_0^{0{,}64} 81(0{,}64-x)dx =$

$81\pi\cdot \int_0^{0{,}64}(0{,}64-x)\, dx =$

$81\pi\cdot\left(\int_0^{0{,}64} 0{,}64\, dx - \int_0^{0{,}64} x\, dx \right) =$

$81\pi\cdot\left(0{,}64\cdot 0{,}64 - \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^{0{,}64} \right) =$

$81\pi\cdot(0{,}64^2 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}64^2) =$

$81\pi\cdot(\frac{1}{2}0{,}64^2) = 81\pi\cdot 0{,}4096/2 = 16{,}5888\cdot\pi$

$V_{ges} = 2\cdot V_r = 33{,}1776\cdot\pi = 104{,}23\text{ cm}^3$.

Hausaufgabe 19

Welches Volumen hat eine Linse mit der Randfunktion (in Q1) $f(x) = 8\cdot\sqrt{0{,}5476 - x}$? Geben Sie auch die Maße der Linse an (Durchmesser und Dicke).

Lösung: $f(x)^2 =$.

=

=

=

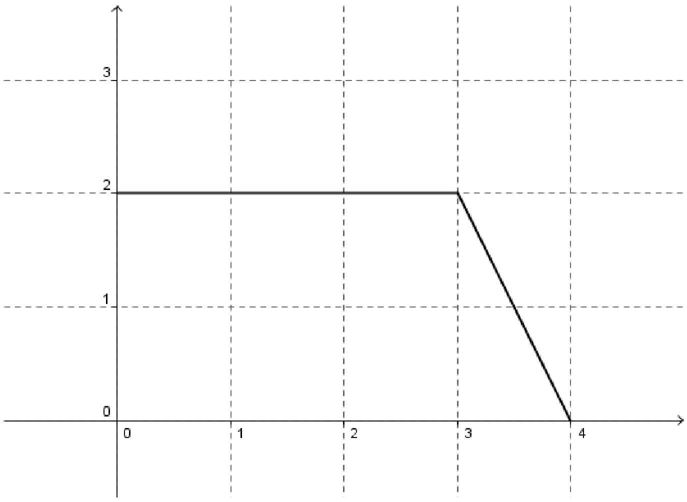
.

.

.

Übungsaufgabe: Berechnen Sie das Volumen eines Bohrers. Seine Maße in Millimeter sind der folgenden Zeichnung zu entnehmen:

kann übersprungen werden



Lösung: 1. Teil $0 \le x \le 3$ wird bei Rotation ein Zylinder mit Radius 2 mm und Höhe 3 mm:

$V_1 = \pi r^2 h = \pi 2^2 \cdot 3 = 12\pi$ mm³

2. Teil $3 \le x \le 4$ wird bei Rotation ein Kegel. Geradengleichung:

$y = mx + b$

Aus Zeichnung ersichtlich: m = -2. Punktprobe mit (3|2):

$2 = -2 \cdot 3 + b = -6 + b \Rightarrow b = 8$

$y = -2x + 8$

Gesamtfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \le x \le 3 \\ -2x + 8 & \text{für } 3 = x \le 4 \end{cases}$$

$$V_2 = \pi \int_3^4 (-2x + 8)^2\, dx = \pi\, {}^1/_3 \cdot {}^1/_{(-2)} \left[(-2x + 8)^3\right]_3^4 =$$

$-{}^1/_6 \cdot \pi(0 - 2^3) = {}^8/_6\pi = 1\,{}^1/_3\pi$ mm³

$V_{ges} = V_1 + V_2 = (12 + 1\,{}^1/_3)\pi$ mm³ $= 13\,{}^1/_3\pi$ mm³ $\approx 41{,}888$ mm³.

Übungsaufgabe: Volumen eines Fasses, s. gesondertes Blatt
E:\ownfiles\bzm\zeitlos\BOS\Mathe\Volumen eines Fasses.doc

Folgt AB-Rotationskörper1.doc

1.3 Die Exponentialfunktion

1.3.1 Einleitendes Beispiel: Zinseszinsrechnung

Die Zinseszinsformel ist ein Ihnen bekanntes Beispiel einer Exponentialfunktion. Das Kapital, das auf ein Sparbuch eingezahlt wird, wächst (gleichbleibender Zinssatz unterstellt) exponentiell. Die Zinseszinsformel lautet:

Formel 3: $K_n = K_0 \cdot (1 + {}^p/_{100})^n$

Dabei ist K_0 das Anfangskapital, das eingezahlt wird (Jahr 0), K_n das Gesamtkapital nach n (ganzen) Jahren, p der Zinssatz (in %) und n die Zahl der Jahre. Bisher war n eine ganze Zahl.

Der Faktor $q = (1 + {}^{p}/_{100})$ wird **Vermehrungsfaktor** oder Wachstumsfaktor ($q > 1$) bzw. **Abnahmefaktor** ($q < 1$) genannt. Im Fall $q = 1$ bleibt das Kapital konstant, diesen Fall schließen wir im Folgenden aus.

Bsp.: Wir nehmen einen Zinssatz von 20% an (die absolute Zahl ${}^{p}/_{100} = 0{,}2$ nennt man dann den **Zinsfuß**), Einzahlung 5000 €. Das Kapital entwickelt sich dann wie folgt:

n	K_n (exponentielles	Wachstum)	lineares	Wachstum
0	5000	×1,2	5000	+1000
1	6000	×1,2	6000	+1000
2	7200	×1,2	7000	+1000
3	8640		8000	
4	10368		9000	
5	12441,60		10000	
6	14929,92		11000	
7	17915,904		12000	
8	21499,0848		13000	

Der Vermehrungsfaktor ist hier 1,2. D. h. das Kapital des nächsten Jahres erhalten wir, indem wir das aktuelle Kapital mit 1,2 multiplizieren. Demgegenüber entwickelt sich das Kapital bei linearem Wachstum (die Zinsen werden jährlich ausbezahlt) langsamer. Bei großen Zinssätzen tritt der Unterschied (der Zinseszins) deutlich zu Tage.

Für exponentielles Wachstum ist charakteristisch, dass sich bei Zunahme der Zeit um eine Einheit der Funktionswert um den stets gleichen Faktor (Wachstumsfaktor, Vermehrungsfaktor) erhöht.

1.3.2 Die allgemeine Exponentialfunktion

Zur Exponentialfunktion gelangen wir nun, indem wir die Beschränkung von n auf ganze Zahlen fallen lassen. Statt dessen können alle reellen Zahlen zugelassen werden. Dementsprechend nennen wir die Hochzahl (die Variable) jetzt t.

Die Formel aus dem Beispiel eben für das Kapital schreibt sich dann

$K(t) = 5000 \cdot 1{,}2^t$

Allgemein erhalten wir so für die Exponentialfunktion:

Formel 4: $f(t) = a \cdot b^t$

mit: a = Anfangswert (z. B. Startkapital), b = Wachstumsfaktor.

Die Verallgemeinerung auf reelle Exponenten gelingt allerdings nur, wenn die Basis b nicht negativ ist. Da der Fall b = 0 zu einer Funktion führt, die ständig 0 ist, und b = 1 zu einer Funktion, die ständig a ist, können wir auch diese Fälle ausschließen und verlangen von b:

$b > 0$ und $b \neq 1$ oder als Menge: $b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

Bsp.: In einem See befinden sich anfangs 30 Seerosen. In einer Woche nimmt der Bestand um 35% zu. Wie entwickelt sich der Seerosenbestand?

Anfangswert: a=30

Vermehrungsfaktor: $b = 1{,}35$ $(= 1 + {}^{35}/_{100})$

$f(t) = 30 \cdot 1{,}35^t$ (t in Wochen)

Die ersten Werte lauten dann:

Woche	Anzahl
0	30
1	40,5
2	54,675 $(54\,{}^{27}/_{40})$
3	$\approx$73,81 $(73\,{}^{649}/_{800})$

In der Woche -1 (vorige Woche) waren es dann

$f(-1) = 30 \cdot 1{,}35^{-1} = 30/1{,}35 = 22\,{}^{2}/_{9}$,

davor $f(-2) = 30 \cdot 1{,}35^{-2} = 30/1{,}35^2 = 16\,{}^{112}/_{243} \approx 16{,}46$ usw.

Man kann also auch in der Zeit zurückrechnen.

Da die Potenzen $1{,}35^t$ mit zunehmenden t immer größer werden, wird

$f(-t) = 30 \cdot 1{,}35^{-t} = 30/1{,}35^t$

immer kleiner, ist aber stets positiv. Daher können wir schlussfolgern:

$f(-t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, also

$f(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow -\infty$.

Der Wert 0 wird nie erreicht, für positive t erst recht nicht, daher hat f(t) **keine NST**.

Für positive t-Werte wächst f unbegrenzt: $f(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$.

Umstellung der Zeiteinheit auf Tage:

W	${}^{1}/_{7}$	${}^{2}/_{7}$	${}^{3}/_{7}$	…			1							2
T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Aus der Tabelle ersehen wir, dass wir die Tage dann durch 7 teilen müssen: t → t/7

$f(t) = 30 \cdot 1{,}35^{t/7}$ (t in Tagen)

Probe: Nach einer Woche ist $f(7) = 30 \cdot 1{,}35^{7/7} = 30 \cdot 1{,}35^1 = 30 \cdot 1{,}35$

Hausaufgabe 20

Ein Aktiendepot von anfänglich 20000 € nimmt jährlich um 8% zu. Nach welcher Funktion entwickelt es sich? Berechnen Sie den Depotwert für die nächsten 3 Jahre.

Lösung: f(t) =

Depotentwicklung:

0	1	2	3	4
20000				

Beispiel mit einer Abnahme: Ein Maschine wurde zu 12 T€ angeschafft. Im Laufe der Zeit verliert sie durch den Gebrauch kontinuierlich an Wert. In diesem Beispiel seien es 15% pro Jahr. Welchen Wert hat die Maschine nach t Jahren?

Anfangswert: 12

Abnahmefaktor: $1 - {}^{15}/_{100} = 0{,}85$

$f(t) = 12 \cdot 0{,}85^t$

Wertetabelle (s. u.):

Die Abnahme entspricht einer **negativen** Verzinsung. Einen Wertverlauf nach dieser Rechnung nennt man auch **degressive Abschreibung**. Die Funktion wird offenbar immer kleiner, da die Potenzen von 0,85 mit zunehmendem t immer kleiner werden. Daher gilt:

t	f(t) in T€
0	12
1	10,2
2	8,67
3	7,3695

$f(t) \to 0$ für $t \to \infty$, wenn $b < 1$ ist.

Für t = 0 kommt offenbar immer der Anfangswert (a) heraus, da $b^0 = 1$ ist.

Umstellung auf die Zeiteinheit Monate (zur Übung): 1 Jahr = 12 Monate, daher

t → t/12

$f(t) = 12 \cdot 0{,}85^{t/12}$ (t in Monaten)

Probe: Nach 12 Monaten (=1 Jahr) ist $f(12) = 12 \cdot 0{,}85^{12/12} = 12 \cdot 0{,}85$.

Zur Übung: Umstellung auf die Zeiteinheit Quartale:

1 Jahr = 4 Quartale, daher t → t/4

$f(t) = 12 \cdot 0{,}85^{t/4}$ (t in Quartalen)

Probe: $f(4) = 12 \cdot 0{,}85^{4/4} = 12 \cdot 0{,}85$

Zur Übung: Umstellung auf die Zeiteinheit Tage:

1 Jahr ≈ 365 Tage, daher t → t/365

$f(t) = 12\cdot 0{,}85^{t/365}$ (t in Tagen)

Probe: $f(365) = 12\cdot 0{,}85^{365/365} = 12\cdot 0{,}85$

Obwohl in diesem Anwendungszusammenhang nicht sinnvoll, könnten wir mathematisch auch diese Funktion in die Vergangenheit zurückrechnen (wieder t in Jahren):

$f(-1) = 12\cdot 0{,}85^{-1} = 14{,}12$
$f(-2) = 12\cdot 0{,}85^{-2} = 16{,}61$ usw.

f wird dann größer als der Anfangswert.

Funktionsgraph skizzieren

Die allgemeine Exponentialfunktion $f(t) = a\cdot b^t$ lässt sich für alle reellen Zahlen t definieren, sofern b positiv ist. Ferner verlangen wir $b \neq 1$, da f sonst konstant gleich a wäre. a heißt Anfangs- oder Startwert und ergibt sich aus f(0) (Schnittpunkt mit der y-Achse). b heißt Wachstumsfaktor (Vermehrungsfaktor), wenn $b > 1$ bzw. Abnahmefaktor, wenn $b < 1$. f(t) hat keine Nullstellen. Die Funktion zeigt streng monotones Wachstum, wenn $b > 1$ bzw. streng monotone Abnahme, wenn $b < 1$.

Hausaufgabe 21

Im Körper eines Infizierten vermehren sie Viren derart, dass ihre Anzahl jede Stunde um 12% zunimmt. Ein Patient wird mit 50 Viren infiziert. Nach welcher Funktion entwickelt sich die Virenzahl in seinem Körper? Berechnung für 1, 2, 3, 12, 24, 48 Stunden. Geben Sie die Funktion auch in der Zeiteinheit ‚Tage' an.

Lösung: f(t) = (t in Stunden). Berechnung der Werte:

t [h]	1	2	3	12	24	48
N						

In Tagen: f(t) =

1.3.3 Die besonderen Basen 10 und e

1.3.3.1 Die Basis 10

Die Basis 10 hat für uns eine besondere Bedeutung, da 10 zugleich auch die Basis unseres Zahlensystems ist. Die Stellenschreibweise ist ja eine Kurz-schreibweise für Ziffern multipliziert mit einer Zehnerpotenz. Z. B. die Zahl 5623,9 lässt sich ausgeschrieben darstellen als

$5*10^3 + 6*10^2 + 2*10^1 + 3*10^0 + 9*10^{-1}$.

Man benutzt die sog. Zehnerpotenzschreibweise (engl. scientific notation) auch gern zur Darstellung sehr großer oder sehr kleiner Zahlen. Z. B.:

3,6 Mrd → $3{,}6*10^9$ (Eingabe 3,6 EEX 9)

40 Billionen → $40*10^{12} = 4*10^{13}$

Die Anzahl der Atome in einem cm³ liegt in der Größenordnung $1*10^{23}$.

Kleine Zahlen:

1 Millionstel = 1/1000 000 = $1/10^6 = 10^{-6}$

1 Milliardstel = $1/10^9 = 10^{-9}$

Die Potenzen von 10 lassen sich auch mit „krummen" Exponenten leicht mit dem Taschenrechner berechnen, da diese Funktion auf allen Taschenrechnern implementiert ist. So ist z. B.:

$10^{0,3} \approx 1{,}9953 \approx 2$

$10^{1,6} \approx 39{,}811$

$10^{-3,6} \approx 0{,}000\ 251\ 19$ usw.

Die Bedeutung der Basis 10 resultiert aber auch aus ihrer Umkehrfunktion lg(x) (auf TR meist leider mit log bezeichnet), die dekadischer (oder Zehner- oder Briggscher) Logarithmus genannt wird. Diese Funktion ist auf jedem Taschenrechner vorhanden.

1.3.3.2 Die Basis e

Die Zahl e = 2,7182818… ist irrational und wird Eulersche Zahl genannt. e wird in der Wissenschaft meistens als Basis verwendet. Ihre besondere Bedeutung kommt bei der Ableitung bzw. beim Integrieren zum Ausdruck. Außerdem lässt sich jede andere Exponentialfunktion auf die Basis e bringen.

Auch die Funktion e^x ist auf allen Taschenrechnern implementiert. Wir berechnen beispielsweise

$e^{0,2} \approx 1{,}2214$

$e^{12} \approx 162\ 754{,}8$

$e^{4\ 2/9} \approx 68{,}185$ usw.

Die Umkehrfunktion ln(x) heißt natürlicher Logarithmus und ist ebenfalls auf allen Taschenrechnern vorhanden.

1.4 Die Logarithmus-Funktion

Die Umkehrfunktion einer Exponentialfunktion nennt sich Logarithmus-Funktion. Mit ihrer Hilfe lösen wir nach dem Exponenten auf. Zu jeder Exponentialfunktion gibt es eine eigene Logarithmus-Funktion.

$f(x) = b^x$ hat die Umkehrfunktion

Formel 5: $f^{-1}(x) = \log_b(x)$

Beispiele:

a) $\log_3(9) = 2$, da $3^2 = 9$

b) $\log_{10}(10000) = \lg(10000) = 4$, da $10^4 = 10000$

c) $\log_2(8) = \mathrm{ld}(8) = 3$, da $2^3 = 8$ (ld = Log. dualis = Zweierlogarithmus)

d) $\log_2(1) = \mathrm{ld}(1) = 0$, da $2^0 = 1$

Das letzte Ergebnis ist für alle Basen gültig, da immer $b^0 = 1$ gilt. Daher haben alle Logarithmus-Funktionen eine NST bei 1:

Formel 6: $\log_b(1) = 0$

Da nicht auf allen Taschenrechnern die allgemeine Logarithmus-Funktion implementiert ist, sei hier gleich die Umrechnungsformel angegeben:

Formel 7: $\log_b(x) = \ln(x)/\ln(b) = \lg(x)/\lg(b)$

Beweis der Umrechnungsformel:

Sei $u = b^x \Rightarrow x = \log_b(u)$

Sei ferner $b = e^v$ mit einem v, das berechnet wird durch $v = \ln(b)$. Dann ist

$b^x = (e^v)^x = e^{v \cdot x} = u \Rightarrow$

$\ln(u) = v \cdot x = x \cdot \ln(b)$ | auflösen nach x

$x = \ln(u)/\ln(b)$ | Gleichsetzen

$\log_b(u) = \ln(u)/\ln(b)$

Damit können wir auch Logarithmen von „krummen“ Potenzen berechnen:

a) $\log_3(14) = \ln(14)/\ln(3) \approx 2{,}4022$, da $3^{2,4022} = 14$

b) $\log_6(20) = \ln(20)/\ln(6) \approx 1{,}672$, da $6^{1,672} = 20$

c) $\log_2(10) = \ln(10)/\ln(2) \approx 3{,}32193$, da $2^{3,32193} = 10$

d) $\log_{7,5}(35) = \ln(35)/\ln(7{,}5) \approx 1{,}7645$, da $7{,}5^{1,7645} = 35$

e) $\log_{0,4}(0{,}05) = \ln(0{,}05)/\ln(0{,}4) \approx 3{,}2694$, da $0{,}4^{3,2694} = 0{,}05$

Die Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ besitzt die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \log_b(x)$. Sie löst nach dem Exponenten x auf (d. h. $\log_b(b^x) = x$ bzw. $b^{\log_b(x)} = x$). Alle Logarithmus-Funktionen haben bei 1 eine NST. Zur Berechnung allgemeiner Logarithmen kann die Umrechnungsformel $\log_b(x) = \ln(x)/\ln(b)$ dienen.

Hausaufgabe 22

Berechnen Sie die Logarithmen:

a) $\log_3(3)$	b) $\log_5(125)$	c) $\log_{10}(1000)$
d) $\log_{1,5}(2,25)$	e) $\log_{3,6}(12)$	f) $\log_{1,2}(2)$

Lösung:
a) ; b) ; c) ; d) ; e) ; f) .

1.4.1 Anwendung auf die einfache Exponentialfunktionen

Bsp.: Wir zahlen 1€ auf ein Sparkonto ein, das mit 10% verzinst wird. Nach welcher Zeit hat sich das Kapital verdoppelt (Verdoppelungszeit)?

Wachstumsfunktion: $f(t) = 1{,}1^t$ (t in Jahren)

Es ist die Gleichung

$2 = 1{,}1^t$

nach t aufzulösen. Das gelingt mit $\log_{1,1}(x)$:

$2 = 1{,}1^t \quad | \log_{1,1}$

$\log_{1,1}(2) = \log_{1,1}(1{,}1^t) = t$

$t = \log_{1,1}(2) = \ln(2)/\ln(1{,}1) = 7{,}2725$ a

Probe $1{,}1^{7,2725} = 2$

Bsp.: Die Seerosen auf einem See bedecken anfangs eine Fläche von 1 m². Die Fläche nimmt in 3 Monaten um 20% zu. Wann hat sie 6 m² erreicht?

Wachstumsfunktion:

$f(t) = 1{,}2^t$ (t in Quartalen) bzw.

$f(t) = 1{,}2^{t/3}$ (t in Monaten) (oder $1{,}2^{4t}$ mit t in Jahren)

$6 = 1{,}2^{t/3} \quad | \log_{1,2}(x)$

$\log_{1,2}(6) = t/3 \Rightarrow t = 3\cdot\log_{1,2}(6)$

$t = 3\cdot\ln(6)/\ln(1{,}2) \approx 29{,}48$ Monate

Alternativberechnung in Jahren (führen die Schüler eigenständig aus):

$6 = 1{,}2^{4t} \quad | \log_{1,2}$

$\log_{1,2}(6) = 4t$

$t = \frac{1}{4}\log_{1,2}(6) \approx 2,457$ a

Hausaufgabe 23

Ein Schimmelpilz auf einem Stück Käse hat anfangs eine Fläche von 1 cm². Alle 3 Tage vergrößert sich seine Fläche um 10%. Das Stück Käse ist quaderförmig mit den Maßen 7 cm×4 cm×6 cm. Nach wieviel Tagen wird der Schimmel die gesamte Oberfläche bedeckt haben?

Lösung:

Wachstumsfunktion: f(t) ;

Quaderfläche: ;

Gleichung: d.

1.4.2 Anwendung auf die allg. Exponentialfunktion

Um auch einen beliebigen Anfangswert verarbeiten zu können, brauchen wir noch die folgenden Logarithmengesetze:

Logarithmus eines Produkts:

kann übersprungen werden

Formel 8: $\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$

Beweis: Es sei $u = b^x$ und $v = b^y$. Somit ist

$x = \log_b(u)$ und $y = \log_b(v)$

$u \cdot v = b^x \cdot b^y = b^{x+y}$

$\log_b(u \cdot v) = \log_b(b^{x+y}) = x + y = \log_b(u) + \log_b(v)$.

Analog wird die Formel für den Logarithmus eines Quotienten

kann übersprungen werden

Formel 9: $\log_b(u/v) = \log_b(u) - \log_b(v)$

Beispiel: Eine Maschine wird zu 12 000 € angeschafft. Ihr Marktwert sinkt jährlich um 23%. Wann ist ihr Marktwert halb so groß wie der Kaufpreis?

Lösung:

$q = 1 - \frac{23}{100} = 0,77$ Abnahmefaktor

$f(t) = 12\,000 * 0,77^t$

Ansatz:

$6\,000 = 12\,000 \cdot 0,77^t$

$0,5 = 0,77^t$

$\log_{0,77}(0,5) = t = 2,652$ a

Beispiel 2: Ein Radium-226 Präparat strahlt radioaktiv mit einer Halbwertszeit von 1600 Jahren. Das Präparat wiegt 80 g. Wie viel davon wird in 100 Jahren noch übrig sein? Nach wie viel Jahren werden es nur noch 70 g sein?

Lösung:

$f(t) = 80\ g \cdot 0{,}5^{t/1600}$ (t in Jahren)

In 100 Jahren:

$f(100) \approx 80\ g \cdot 0{,}9576 = 76{,}61\ g$

$70\ g = 80\ g \cdot 0{,}5^{t/1600}$

${}^{7}/_{8} = 0{,}5^{t/1600}$

$t/1600 = \log_{0,5}({}^{7}/_{8}) \approx 0{,}1926$

$t = 1600 \cdot 0{,}1926 = 308{,}23\ a$

Hausaufgabe 24

Ein See von 125 m² Größe ist zu 9 m² mit Seerosen bedeckt. Die Seerosen wachsen in der Fläche alle 4 Wochen um 25%. Wie groß ist die bedeckte Fläche nach nach 10 Wochen? Wann ist der See halb bzw. vollständig bedeckt?

Lösung: f(t) (t in Wochen)

f m²

M).

W.

1.5 Die e-Funktion

Die Basis e wird in der Wissenschaft häufig gebraucht. Sie bietet besondere Vorteile beim Ableiten und Integrieren.

Andere Exponentialfunktionen lassen sich auf die Basis e umstellen.

Beispiel: Für die Maschine des vorvorigen Beispiels hatten wir gefunden:

$f(t) = 12\,000 * 0{,}77^{t}$

Wir setzen nun an: $0{,}77 = e^{x} \Rightarrow x = \ln(0{,}77) \approx -0{,}26136$

$0{,}77^{t} = (e^{\ln(0,77)})^{t} = e^{t \cdot \ln(0,77)} \approx e^{-0,26136t}$

$f(t) = 12\,000 \cdot e^{t \cdot \ln(0,77)} \approx 12\,000 \cdot e^{-0,26136t}$

Durch diesen Trick lässt sich jede Exponentialfunktion auf die Basis e bringen.

Weitere Beispiele:

$f(t) = 80\ g \cdot 0{,}5^{t/1600} = 80 \cdot e^{t/1600 \cdot \ln(0,5)} \approx 80 \cdot e^{-0,00043322t}$

$f(t) = 35 \cdot 1{,}07^{t/3} = 35 \cdot e^{t/3 \cdot \ln(1,07)} \approx 35 \cdot e^{0,022553t}$

$f(t) = 12 \cdot 1{,}2^{2t} = 12 \cdot e^{2t \cdot \ln(1,2)} \approx 12 \cdot e^{0,36464t}$

Umgekehrt lassen sich e-Funktionen als allgemeine Exponentialfunktionen darstellen:

$e^{1,0986t} = (e^{1,0986})^{t} \approx 3^{t}$

$e^{-0,28768t} \approx 0,75^t$ usw.

Hausaufgabe 25

Stellen Sie als e-Funktion dar:
a) $f(t) = 37 \cdot 3,5^t$ b) $f(t) = 120 \cdot 4,7^{t/3}$ c) $f(t) = 50 \cdot 0,95^t$

Lösung: a) f(t) = b) f(t)= c) .

1.5.1 Die Umkehrfunktion ln(x)

Die Umkehrfunktion ist der natürliche Logarithmus ln(x), so dass also

$\ln(e^x) = x$ und ebenso $e^{\ln(x)} = x$

Es ist z. B. $\ln(4) = 1,3863$, da $e^{1,3863} = 4$ ist. Wie bei allen Logarithmen ist $\ln(1) = 0$, da $e^0 = 1$ ist.

Übungsaufgabe: Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen von $f(x) = \frac{1}{2}e^x - (e^x)^2$

1. Mit der y-Achse: $f(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

2. Mit der x-Achse:

$\frac{1}{2}e^x - (e^x)^2 = 0$ | e^x ausklammern

$e^x(\frac{1}{2} - e^x) = 0$ | e^x hat keine NST

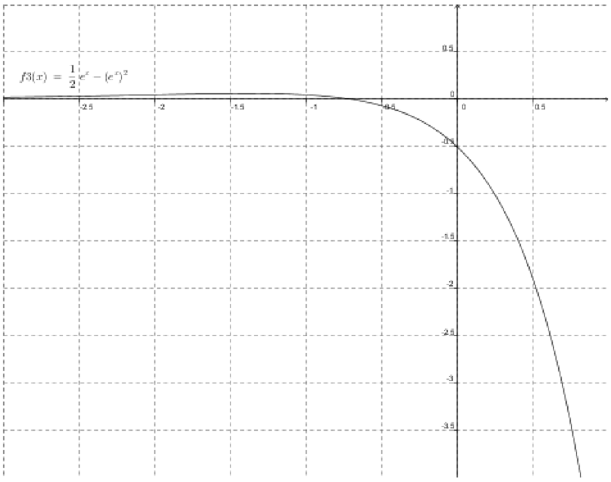
$\frac{1}{2} - e^x = 0$

$e^x = \frac{1}{2}$ | logarithmieren

$x = \ln(0,5) \approx -0,69315$

Probe: $f(\ln(0,5)) = \frac{1}{2}e^{\ln(0,5)} - (e^{\ln(0,5)})^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 = 0$

Grafik:



Übungsaufgabe: Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen von $f(x) = \frac{4}{3}e^x - e^{3x}$

1. Mit der y-Achse: $f(0) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

2. Mit der x-Achse:

$\frac{4}{3}e^x - e^{3x} = 0$ | e^x ausklammern

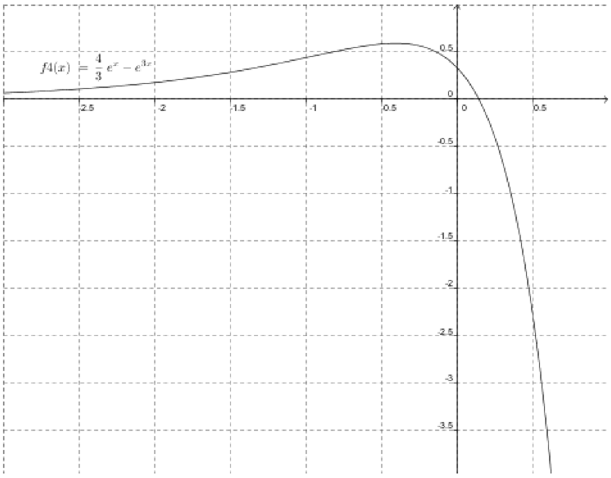
$e^x(\frac{4}{3} - e^{2x}) = 0$ | e^x hat keine NST

$^4/_3 - e^{2x} = 0$

$e^{2x} = {}^4/_3$ | logarithmieren

$2x = \ln(^4/_3) \Rightarrow x = {}^1/_2\ln(^4/_3) \approx 0{,}14384$

Probe: $f(^1/_2\ln(^4/_3)) = {}^4/_3e^{1/2\cdot\ln(4/3)} - e^{3/2\cdot\ln(4/3)} =$
$^4/_3(e^{\ln(4/3)})^{1/2} - (e^{\ln(4/3)})^{3/2} = {}^4/_3\cdot(^4/_3)^{1/2} - (^4/_3)^{3/2} =$
$(^4/_3)^{3/2} - (^4/_3)^{3/2} = 0$

Grafik: 

Hausaufgabe 26

Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen von
$f(x) = x\cdot e^{-x} + 2e^{-x}$!

Lösung: f(0) =,

.

1.5.2 Die Ableitung der e-Funktion

Ohne Beweis teilen wir mit: Die Ableitung der e-Funktion ist wieder die e-Funktion!

Formel 10: $(e^x)' = e^x$

Das bedeutet: je höher die Funktion ist, desto steiler ist sie auch oder umgekehrt (für negative x-Werte): Je kleiner die Funktion ist, desto flacher verläuft ihr Graph auch.

Übungsaufgabe: Bilde die Ableitung von $f(x) = 2\cdot e^{-x/3}$

Substitution: $z = -x/3$, innere Abl.: $z' = -^1/_3$

Äußere Ableitung: $(2\cdot e^z)' = 2\cdot e^z$

Gesamte Ableitung: $f' = 2\cdot(-^1/_3)\cdot e^{-x/3} = -^2/_3\cdot e^{-x/3}$

Übungsaufgabe: Bilde die Ableitung von $f(x) = {}^1/_4x^2\cdot e^{-x}$ und bestimme die Gleichung der Tangente an den Stellen $x_1=1{,}5$ und $x_2=-2{,}5$.

Produktregel: $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$

Wir setzen $u = {}^1/_4x^2$ und $v = e^{-x}$

Dann ist $u' = \frac{1}{2}x$ und $v' = -e^{-x}$

$f' = \frac{1}{2}x \cdot e^{-x} + \frac{1}{4}x^2 \cdot (-e^{-x}) = \frac{1}{2}x \cdot e^{-x} \cdot (1 - \frac{1}{2}x)$

Tangente bei $x_1 = 1{,}5$:

$y_1 = f(1{,}5) = 0{,}1255$

$m = f'(1{,}5) = 0{,}041837$

Ansatz mit unbekanntem Koeffizienten:

$t(x) = 0{,}041837x + b$

Punktprobe:

$0{,}1255 = 0{,}041837 \cdot 1{,}5 + b = 0{,}062755 + b$

$b = 0{,}062755$

$\mathbf{t(x) = 0{,}041837x + 0{,}062755}$

Tangente bei $x_2=-2{,}5$:

$y_2 = f(-2{,}5) = 19{,}035$

$m = f'(-2{,}5) = -34{,}263$

Ansatz mit unbekanntem Koeffizienten:

$t(x) = -34{,}263 \cdot x + b$

Punktprobe:

$19{,}035 = -34{,}263 \cdot (-2{,}5) + b = 85{,}658 + b$

$b = -66{,}623$

$\mathbf{t(x) = -34{,}263 \cdot x - 66{,}623}$

Hausaufgabe 27

Bilden Sie die Ableitung von $f(x) = 2x \cdot e^{x/3}$ und bestimmen Sie die Tangente an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$.

Lösung: .
$f' =$;
$y_1 =$;
$y_2 =$.

ÜA: Diskutiere die Kurve der Funktion $f(x) = e^{x/8} - \frac{1}{50} \cdot e^x$ nach dem Schema

a) Definitionsbereich und Symmetrie,

b) Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs,

c) Schnittpunkte mit den Achsen,

d) Extrempunkte,

e) Wendepunkte,

f) Wertebereich und

g) zeichnen Sie den Graphen im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ (y: 4cm pro Einh.).

Zu a: Definitionsbereich und Symmetrie

$D = \mathbb{R}$

Symmetrie: $f(-x) = e^{-x/8} - {}^{1}/_{50} \cdot e^{-x} \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ keine Symmetrie

Zu b: Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

$x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (e^{x/8} - {}^{1}/_{50} \cdot e^{x}) =$$

$$\lim_{x \to -\infty} (e^{x/8}) - \lim_{x \to -\infty} ({}^{1}/_{50} \cdot e^{x}) = 0 - 0 = 0$$

$x \to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (e^{x/8} - {}^{1}/_{50} \cdot e^{x}) =$$

$$\lim_{x \to \infty} (e^{x} \cdot (e^{-7/8 x} - {}^{1}/_{50})) = \lim_{x \to \infty} (e^{x} \cdot (- {}^{1}/_{50})) = -\infty$$

weil $e^{-7/8 x} - {}^{1}/_{50} \to -{}^{1}/_{50}$ wenn $x \to \infty$.

Zu c: Schnittpunkte mit den Achsen

1. Mit der y-Achse:

   $f(0) = 1 - {}^{1}/_{50} = \mathbf{{}^{49}/_{50} = 0{,}98}$

2. Mit der x-Achse:

   $e^{\frac{1}{8}x} - {}^{1}/_{50} \cdot e^{x} = 0$ | e^{x} ausklammern

   $e^{x}(e^{\frac{1}{8}x - x} - {}^{1}/_{50}) = 0$ | $x/8 - x = -{}^{7}/_{8}x$

   $e^{x}(e^{-\frac{7}{8}x} - {}^{1}/_{50}) = 0$

   Da $e^{x} > 0$, kann nur der Klammerausdruck Null werden:

   $e^{-\frac{7}{8}x} - {}^{1}/_{50} = 0$

   $e^{-\frac{7}{8}x} = {}^{1}/_{50}$ | ln

   $- {}^{7}/_{8}x = \ln({}^{1}/_{50})$ | $* (-{}^{8}/_{7})$

   $x_0 = - {}^{8}/_{7} \cdot \ln({}^{1}/_{50}) \approx 4{,}4709$

   NST: (4,4709|0)

Zu d: Extrempunkte

Ableitungen bilden:

Substitution: $z = x/8$

$\frac{dz}{dx} = {}^1/_8$

$(e^z)' = e^z$

Somit ist

$(e^{x/8})' = {}^1/_8 e^{x/8}$

$f'(x) = {}^1/_8 e^{x/8} - {}^1/_{50} e^x$

$f''(x) = {}^1/_{64} e^{x/8} - {}^1/_{50} e^x$

$f'''(x) = {}^1/_{512} e^{x/8} - {}^1/_{50} e^x$

Bed.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

${}^1/_8 e^{x/8} - {}^1/_{50} e^x = 0$ $\quad$ | ${}^1/_2 e^x$ ausklammern

${}^1/_2 e^x({}^1/_4 e^{-\frac{7}{8}x} - {}^1/_{25}) = 0$

Da $e^x > 0$, kann nur der Klammerausdruck Null werden:

${}^1/_4 e^{-\frac{7}{8}x} - {}^1/_{25} = 0$

${}^1/_4 e^{-\frac{7}{8}x} = {}^1/_{25}$

$e^{-\frac{7}{8}x} = {}^4/_{25}$ $\quad$ | ln

$-{}^7/_8 x = \ln({}^4/_{25})$

$x_e = -{}^8/_7 \ln({}^4/_{25}) \approx 2{,}094 \rightarrow$ A und $\rightarrow$ X

Probe in f'':

$f''(2{,}094) = -0{,}142 \Rightarrow x_e$ ist Maximalstelle

<

Einsetzen in f(x):

$y_e = f(2{,}094) \approx 1{,}137$ $\quad\rightarrow$ B

<

HP(2,094|1,137)

Zu e: Wendepunkte

Bed.: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

${}^1/_{64} e^{x/8} - {}^1/_{50} e^x = 0$ $\quad$ | ${}^1/_2 e^x$ ausklammern

${}^1/_2 e^x({}^1/_{32} e^{-\frac{7}{8}x} - {}^1/_{25}) = 0$

${}^1/_{32} e^{-\frac{7}{8}x} - {}^1/_{25} = 0$

${}^1/_{32} e^{-\frac{7}{8}x} = {}^1/_{25}$

$e^{-\frac{7}{8}x} = {}^{32}/_{25}$

$-{}^7/_8 x = \ln({}^{32}/_{25})$

$x_w = -\,^8/_7 \ln(^{32}/_{25}) \approx -0{,}2821$ → C und →X

Probe in f''':

$f'''(-0{,}2821) = -0{,}0132 < 0 \Rightarrow$ WP vom Typ LR

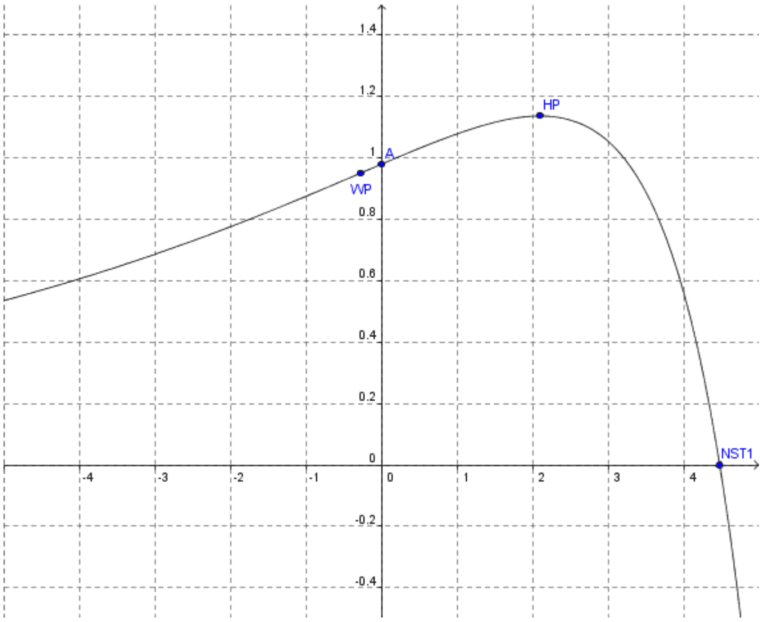
$y_w = f(x_w) = 0{,}9503$ → D

WP(-0,2821|0,9503) vom Typ LR

Zu f: Wertebereich

$W = (-\infty|1{,}137]$

Zu g: Zeichnung:



1.5.3 Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion

Bei der allgemeinen Exponentialfunktion $f(x) = a\cdot b^x$ gehen wir zum Ableiten über die e-Funktion. Das Ergebnis kann ggf. wieder als allg. Exponentialfunktion dargestellt werden.

Beispiel: Es sei die Ableitung von $f(x) = 200\cdot 1{,}085^{x/4}$ zu bilden.

1. Schritt: Umbasierung auf die Basis e:
$1{,}085 = e^{\ln(1{,}085)}$

$f(x) = 200\cdot e^{x\cdot \ln(1{,}085)/4}$

2. Schritt: Ableitung der e-Funktion:

$z = x\cdot\ln(1{,}085)/4$; $z' = \ln(1{,}085)/4$ innere Ableitung

$f(z) = 200\cdot e^z$

$f'(z) = 200\cdot e^z$ äußere Ableitung

$f'(x) = 200\cdot\ln(1{,}085)/4\cdot e^{x\cdot\ln(1{,}085)/4} = 50\cdot\ln(1{,}085)\cdot e^{x\cdot\ln(1{,}085)/4}$

3. Schritt: Rückumwandlung in allg. Exponentialfunktion:

$f'(x) = 50\cdot\ln(1{,}085)\cdot 1{,}085^{x/4} \approx 4{,}079\cdot 1{,}085^{x/4}$

Übungsaufgabe: Bilden Sie die Ableitung von $f(t) = 85\cdot 1{,}25^{t/7}$!

Lösung: Umbasieren: $1{,}25 = e^{\ln(1{,}25)}$,

$f(t) = 85\cdot e^{\ln(1{,}25)/7\cdot t}$

$z = \ln(1{,}25)/7\cdot t \Rightarrow z' = \ln(1{,}25)/7$

$f(z) = 85\cdot e^z \Rightarrow f'(z) = 85\cdot e^z$

$f'(t) = \ln(1{,}25)/7\cdot 85\cdot e^{\ln(1{,}25)/7\cdot t} = 12^1/_7\cdot\ln(1{,}25)\cdot 1{,}25^{t/7}$

Übungsaufgabe: Berechnen Sie die Gleichung der Tangente von $f(t) = 0{,}8\cdot 0{,}75^{3t}$ an der Stelle $t = 0{,}5$.

Lösung: Funktionswert: $f(0{,}5) = 0{,}5196 \rightarrow Y$

Ableitung bilden:

$0{,}75 = e^{\ln(0{,}75)}$,

$f(t) = 0{,}8\cdot e^{\ln(0{,}75)\cdot 3t}$

$z = \ln(0{,}75)\cdot 3t \Rightarrow z' = \ln(0{,}75)\cdot 3$

$f(z) = 0{,}8\cdot e^z \Rightarrow f'(z) = 0{,}8\cdot e^z$

$f'(t) = \ln(0{,}75)\cdot 3\cdot 0{,}8\cdot e^{\ln(0{,}75)\cdot 3t} = 2{,}4\cdot\ln(0{,}75)\cdot 0{,}75^{3t}$

$f'(0{,}5) = -0{,}44845 \rightarrow M$

Ansatz für die Tangente: $y_T(t) = m\cdot t + b$

Bekannt: $m = -0{,}44845$ und $P(0{,}5|0{,}5196)$

Punktprobe:

$0{,}5196 = -0{,}44845\cdot 0{,}5 + b = -0{,}2242 + b \quad$ | **- (-0,2242)**

$0{,}7438 = b$ [Y - Ans] $\rightarrow$ B

$y_T(x) = -0{,}44845\cdot t + 0{,}7438$

Die Ableitung der e-Funktion $f(x) = e^x$ ist wieder e^x. Daraus folgt, dass e^x auch eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. Die Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion $g(x) = a\cdot b^x$ ist gegeben durch $g'(x) = a\cdot\ln(b)\cdot b^x$.

Hausaufgabe 28

Leiten Sie ab:

a) $f(t) = 5000\cdot 1{,}015^t$ b) $f(t) = 50/e^{2t}$ c) $f(t) = 120\cdot 0{,}83^{t/12}$

Lösung: a) f′(t) ;
b) f′(t) = ; c) f′(t) = .

1.5.4 Integral der allgemeinen Exponentialfunktion

Beispiel: Die Population eines Käfers möge sich nach der Funktion

$f(t) = 120 \cdot 1{,}2^{t/3}$

entwickeln (t in Jahren, f(t) in Stück). Wie groß ist die Population im Durchschnitt im Zeitraum t = 2…3?

Lösung: $\bar{f} = \int_2^3 120\ 1{,}2^{t/3} dt\ /1 =$

$120 \int_2^3 1{,}2^{t/3} dt$

Umbasierung auf e:

$1{,}2^{t/3} = e^{\ln(1,2) \cdot t/3}$

$\int_2^3 1{,}2^{t/3} dt = \int_2^3 e^{\ln(1,2) \cdot t/3} dt$

Wir substituieren: $z = \ln(1{,}2) \cdot t/3$

$\frac{dz}{dx} = \ln(1{,}2)/3$

Beim Ableiten würden wir mit dieser inneren Ableitung Malnehmen. Beim Integrieren müssen wir dieses rückgängig machen, indem wir **durch die innere Ableitung teilen**.

Äußere Aufleitung: $\int e^z\ dz = e^z$

Gesamte Aufleitung:

$\int e^{\ln(1,2) \cdot t/3}\ dt = \frac{1}{\ln(1{,}2)/3}\ e^{\ln(1,2) \cdot t/3} =$

$\frac{3}{\ln(1{,}2)}\ 1{,}2^{t/3}$

Somit erhalten wir:

$120 \int_2^3 1{,}2^{t/3} dt = 120 \cdot \left[\frac{3}{\ln(1{,}2)}\ 1{,}2^{t/3}\right]_2^3 = 120 \cdot \frac{3}{\ln(1{,}2)} \left[1{,}2^{t/3}\right]_2^3 =$

$\frac{360}{\ln(1{,}2)} (1^1/_5 - 1{,}129) = \frac{360}{\ln(1{,}2)} (0{,}07076) = 139{,}71$

Integration durch Substitution:

Hat die Funktion f(x) eine <u>lineare</u> innere Funktion z = mx + b, so kann das Integral $\int f(x)\,dx$ durch Substitution gelöst werden. Ist F(z) eine Stammfunktion von f(z), so ist $\frac{1}{m}$ F(x) eine Stammfunktion von f(x).

Übungsaufgabe: Berechne das Volumen des Rotationskörpers mit der Randfunktion $f(x) = 2\cdot 1{,}6^{-3/8x}$ im Bereich [0;6].

Lösung:

Umbasieren auf e: $f(x) = 2\cdot e^{-3/8 \ln(1{,}6)\cdot x}$

Quadrieren: $f(x)^2 = 4\cdot e^{-3/4 \ln(1{,}6)\cdot x}$

$$V = 4\cdot\pi\cdot\int_0^6 e^{-3/4 \ln(1{,}6)\cdot x}\,dx$$

Substitution: $z = -{}^3/_4 \ln(1{,}6)x$

innere Ableitung: $\frac{dz}{dx} = -{}^3/_4 \ln(1{,}6)$

$\int e^z\,dz = e^z$

$$\int e^{-3/4 \ln(1{,}6)\cdot x}\,dx = -\frac{1}{{}^3/_4 \ln(1{,}6)}\, e^{-3/4 \ln(1{,}6)\cdot x} = -\frac{4}{3\ln(1{,}6)}\, e^{-3/4 \ln(1{,}6)\cdot x}$$

$$V = 4\pi\cdot\left[-\frac{4}{3\ln(1{,}6)} e^{-3/4 \ln(1{,}6)\cdot x}\right]_0^6 =$$

$$-\frac{16\pi}{3\ln(1{,}6)}\left[e^{-3/4 \ln(1{,}6)\cdot x}\right]_0^6 =$$

$$-\frac{16\pi}{3\ln(1{,}6)}\left[1{,}6^{-3/4\cdot x}\right]_0^6$$

$$-\frac{16\pi}{3\ln(1{,}6)}(0{,}1206 - 1) = -\frac{16\pi}{3\ln(1{,}6)}(-0{,}8794) =$$

$9{,}9786\pi \approx 31{,}35$ VE

Hausaufgabe 29 NEU

Berechnen Sie den Mittelwert der Funktion $f(t) = 15\cdot 1{,}8^{3t}$ im Intervall [-1,3].

Lösung: b-a = ; $\bar{f}$ = =

= .

1.6 Begrenztes Wachstum/begrenzte Abnahme

Die bisherigen Funktionen schmiegten sich der x-Achse an, wenn x beliebig groß (beliebig klein) wird. Das soll jetzt verallgemeinert werden auf einen beliebigen anderen Grenzwert. Dazu erweitern wir die Exponentialfunktion um einen Summanden c:

Formel 11: $f(t) = a \cdot b^t + c$

Beispiel: Ein Kranker hat hohes Fieber. Auf dem Höhepunkt der Erkrankung misst er 41°C Fieber (t=0). Er nimmt daraufhin ein Fieber senkendes Medikament ein und misst am nächsten Tag (t=1) 38,6°C. Tags darauf (t=2) ist seine Körpertemperatur auf 37,64°C zurückgegangen.

a) Nach welcher Funktion entwickelt sich die Körpertemperatur?

b) Wie hoch ist seine Körpertemperatur nach $^1/_2$ Tag?

c) Wann hat seine Körpertemperatur 37,2°C erreicht?

d) Welche Temperatur stellt sich auf lange Sicht ein?

Lösung:

Zu a: Wir setzen an: $f(t) = a \cdot b^t + c$

Punktproben:

t=0: $a + c = 41$ I

t=1: $a \cdot b + c = 38{,}6$ II

t=2: $a \cdot b^2 + c = 37{,}64$ III

Das Gleichungssystem ist leider nicht linear. Wir bilden

II-I $ab - a = -2{,}4$

$a(b - 1) = -2{,}4$ IV

III-I $a \cdot b^2 - a = -3{,}36$

$a(b^2 - 1) = -3{,}36$ V

Trick: $b^2 - 1 = b^2 - 1^2 = (b-1)(b+1)$

$a(b-1)(b+1) = -3{,}36$

Aus IV sehen wir, dass $a(b-1) = -2{,}4$ ist $\Rightarrow$

$-2{,}4(b+1) = -3{,}36$

$b+1 = 3{,}36/2{,}4 = 1{,}4$

$b = 1{,}4 - 1 = 0{,}4$ $\qquad b = 0{,}4$

Einsetzen in IV:

$a(-0{,}6) = -2{,}4$

$a = 2{,}4/0{,}6 = 4$ $\qquad a = 4$

Einsetzen in I:

$4 + c \quad = 41$

$c = 37 \qquad\qquad c = 37$

Damit lautet die Funktion:

$f(t) = 4 \cdot 0{,}4^t + 37$

Zu b: Nach $^1/_2$ Tag erhalten wir aus der Funktionsgleichung:

$f(^1/_2) \approx 39{,}53°C$

Zu c: Wir setzen

$37{,}2 = 4 \cdot 0{,}4^t + 37$ und lösen auf:

$0{,}2 = 4 \cdot 0{,}4^t$

$0{,}05 = 0{,}4^t$

$t = \log_{0,4}(0{,}05) \approx 3{,}269$ d = 3 d 6,466 h = 3 d 6 h 27'57''

Zu d: Die Endtemperatur erhalten wir durch den Grenzwert von f für $t \to \infty$:

$0{,}4^t \to 0$ für $t \to \infty$, so dass

$f(t) \to c = 37°C$ für $t \to \infty$.

Beispiel 2: Ein Urlauber bekommt am Mittelmeer ein Kaltgetränk serviert, das anfangs eine Temperatur von 6°C hat. Um es nicht zu kalt zu trinken, lässt er es eine Weile stehen und misst mit einem Wasserthermometer die Temperatur:
Nach 5 Min. hat das Getränkt eine Temperatur von 17°C,
nach 10 Min. sind es noch 23,6°C.

a) Nach welcher Funktion erwärmt sich das Getränk?

b) Welche Temperatur hat es nach 15 Min.?

c) Wann hat das Getränk eine Temperatur von 21°C?

d) Welche Lufttemperatur herrschte am Urlaubsort?

Lösung:

Zu a:

Mit dem Ansatz $f(t) = a \cdot b^t + c$ und t in 5 Min. Intervallen erhalten wir:

t=0:	$a + c$	$= 6$	I
t=1:	$a \cdot b + c$	$= 17$	II
t=2:	$a \cdot b^2 + c$	$= 23{,}6$	III
II-I:	$a(b - 1)$	$= 11$	IV
II-I:	$a \cdot (b^2 - 1)$	$= 17{,}6$	V
	$a(b-1)(b+1)$	$= 17{,}6$	
	$11(b+1)$	$= 17{,}6$	

$b+1 = 1{,}6 \Rightarrow \quad b = 0{,}6$

aus IV $a(-0{,}4) = 11 \Rightarrow \quad a = -27{,}5$

aus I $-27{,}5 + c = 6 \Rightarrow \quad c = 33{,}5$

$f(t) = -27{,}5 \cdot 0{,}6^t + 33{,}5$

In Minuten: $t \rightarrow t/5$

$f(t) = -27{,}5 \cdot 0{,}6^{t/5} + 33{,}5$

Zu b:

$f(15) = -27{,}5 \cdot 0{,}6^3 + 33{,}5 = 27{,}56°C$

Zu c:

$21 = -27{,}5 \cdot 0{,}6^{t/5} + 33{,}5 \quad | -33{,}5$

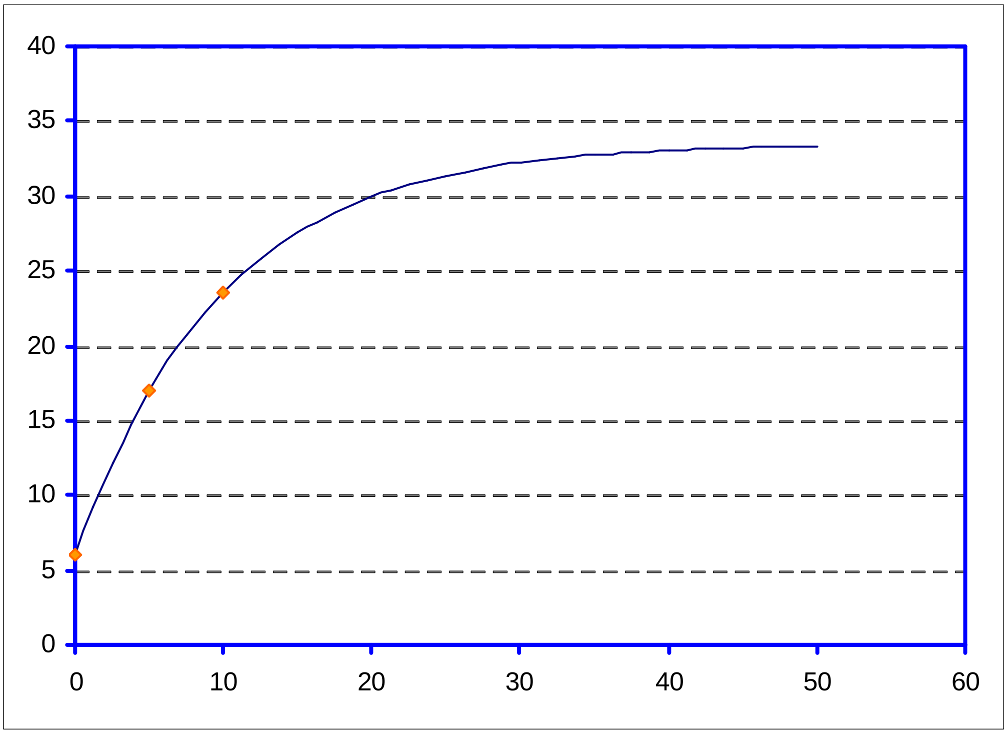
$-12{,}5 = -27{,}5 \cdot 0{,}6^{t/5} \quad |:-27{,}5$

$^5/_{11} = 0{,}6^{t/5}$

$t = 5 \cdot \log_{0,6}(^5/_{11}) \approx 7{,}717$ (Minuten)

Zu d:

Der Grenzwert c gibt die Lufttemperatur an, also 33,5°C



Hausaufgabe 30

Der Druck in einem Autoreifen beträgt 3,4 bar. Nun wird das Ventil geöffnet (t=0). Nach 0,2 s beträgt der Druck noch 2,68 bar, nach 0,4 s noch 2,176 bar.

a) Nach welcher Funktion nimmt der Druck ab? Geben Sie f(t) so an, dass t in Sekunden gemessen wird.

b) Wie hoch ist der Druck nach einer Sekunde?

c) Wann hat sich der Druck von seinem Anfangswert halbiert?

d) Welcher Druck ergibt sich für $t \to \infty$?

Lösung: a) f(t) = ;

b) f(1) = bar

c) t = s

d) .

1.7 Anwendungen der Exponentialfunktion

1.7.1 Die logistische Funktion

Die logistische Funktion beschreibt ebenfalls ein begrenztes Wachstum. Typisch für sie ist der S-förmige Verlauf, d. h. sie hat einen Wendepunkt. Das unterscheidet sie von der weiter oben (in 1.6) angegebenen verallgemeinerten Exponentialfunktion.

Sie tritt bei der Entwicklung einer Population mit einem begrenztem Nahrungsangebot auf, aber auch bei der Markteinführung eines neuen Produkts. Der allgemeine Funktionsterm lautet:

Formel 12: $f(t) = \frac{G}{1 + C \cdot e^{-kt}}$ mit $C = \frac{G}{A} - 1$

Dabei ist

k ein freier Parameter, der die Form der Kurve bestimmt;

G der Grenzwert, der für $t \to \infty$ erreicht wird;

A der Anfangswert, d. h. f(0)

Auch hier wird man sich i. d. R. auf den Bereich $t \geq 0$ beschränken.

Der Parameter k kann z. B. aus dem Wachstum zur Zeit t = 0 bestimmt werden:

Formel 13: $k = f'(0) \cdot \frac{(1 + C)^2}{G\,C}$

Beispiel: In einer Petrischale sollen künstliche Muskelzellen kultiviert werden. Man beginnt mit 4 Zellen. Die Schale bietet Platz für 1000 Zellen. Zu Anfang wachsen die Zellen mit einer Geschwindigkeit von 1,25 pro Stunde (d. h. aus den 4 Zellen sind dann 5,25 geworden). t soll in Stunden gezählt werden.

A = 4

G = 1000

$C = 1000/4 - 1 = 249$

$f'(0) = 1{,}25$

$$k = 1{,}25 \cdot \frac{250^2}{1000 \cdot 249} = 625/1992/h \approx 0{,}313755/h$$

$$f(t) = \frac{1000}{1 + 249\ e^{-0{,}313755t}}$$

Wir erhalten so:

t	f(t)
5	18,92
10	84,72
15	307,65
20	680,84
25	911,04
30	980,07 usw.

Die logistische Funktion hat einen Wendepunkt bei

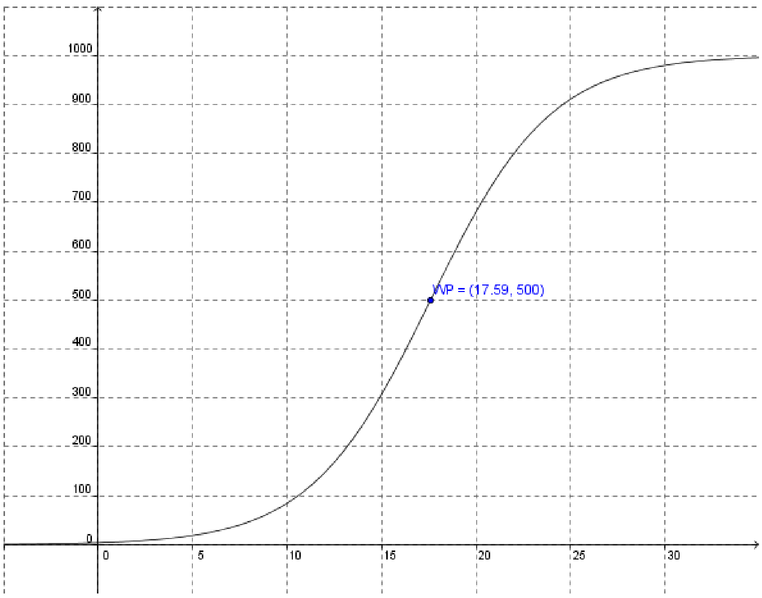
Formel 14: $WP(\frac{\ln(C)}{k}\ |G/2)$

In diesem Punkt wächst sie am schnellsten. Wir berechnen den Wendepunkt mit den Daten des vorigen Beispiels:

$$t_W = \frac{\ln(249)}{0{,}313755} \approx 17{,}59\ h$$

$f(t_W) = 1000/2 = 500$

Grafik:



Bsp.: Bei der Einführung eines neuen Produkts werden zu Anfang 20 Exemplare per Los verschenkt. In der ersten Woche werden 8 Stück verkauft. Das Marktpotenzial wird auf 4000 Stück geschätzt. Wir rechnen die Zeit in Wochen. Wann ist mit dem größten Verkauf pro Woche zu rechnen?

Lösung:

A = 20; G = 4000; f′(0) = 8 pro Woche

C = G/A - 1 = 4000/20 - 1 = 199

$k = 8\cdot 200^2/(4000\cdot 199) = {}^{80}/_{199} \approx 0{,}4020$ pro Woche

$$f(t) = \frac{4000}{1 + 199\,e^{-80/199\cdot t}}$$

Größter Verkauf/Woche ist im Wendepunkt:

$$t_W = \frac{\ln(199)}{{}^{80}/_{199}} \approx 13{,}167 \text{ Wochen}$$

Die Steigung im Wendepunkt ist allgemein gegeben durch

$f'(t_W) = k\cdot G/4$

In diesem Fall: $f'(t_W) = {}^{80}/_{199}\cdot 4000/4 = 402^2/_{199} \approx 402$ Stück/Woche

Der Verkauf hat dann insgesamt G/2 = 2000 Stück erreicht.

Hausaufgabe 31

Auf einer kleinen Insel lebt eine Kaninchenpopulation von 25 Tieren. Die Vermehrungsrate beträgt zu Beginn 0,25 pro Woche. Die Insel bietet genug Nahrung für 500 Tiere.

a) Durch welche Funktion wird das Wachstum der Population beschrieben (t in Wochen)?

b) Berechnen Sie die Größe der Population zu den Zeiten 100, 200, 300 und 400 Wochen. Zeichnen Sie mit dem PC einen Graphen der Funktion im Bereich $0 \le t \le 500$.

c) Wann findet die schnellste Vermehrung statt und wie groß ist diese? Wie groß ist die Population dann?

Lösung:

a) C = G/A - 1 = ;

k ; f(t) = ;

b) 100 200 300 400
;

Grafik:

c) $t_W = \ln(C)/k$.

2 Lineare Algebra

Diesem Kapitel liegt das Lehrbuch „Mathematik Allg. Hochschulreife, Wirtschaft, Cornelsen, 1. Auflage, 1. Druck 2009“ zugrunde.

2.1 Einführung der Matrizen

Eine Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema, das in runden Klammern eingeschlossen ist. Insofern ähnelt es einer Tabelle, aber:

- Zeilen- und Spaltenbeschriftungen fallen in einer Matrix weg;
- mit Matrizen kann man rechnen, mit Tabellen nicht.

Gerade der letztgenannte Punkt macht Matrizen so ungeheuer nützlich. Durch den Einsatz von Tabellenkalkulationprogrammen (z. B. MS-Excel) lassen sich Matrizenberechnungen blitzschnell für große Datenmengen ausführen.

Wir werden Matrizen auf volks- und betriebswirtschaftliche Verflechtungen anwenden. Ferner sind sie hilfreich beim Lösen von linearen Gleichungssystemen.

Wir lernen zunächst einige Beispiele kennen:

2.1.1 Beispiel A: Transportmatrix

Ein Unternehmen betreibt 4 Kiesgruben K_1 … K_4 und 3 Betonwerke B_1 … B_3, in denen der Kies aus den Kiesgruben zu Beton verarbeitet wird.Für den Monat Januar sind die Transporte bezogen auf die ME Tonnen in einer Tabelle zusammengefasst worden.

		nach		
		B_1	B_2	B_3
von	K_1	100	200	50
	K_2	150	150	200
	K_3	0	200	250
	K_4	150	0	0

Betrachtet man nur den Zahlenblock und setzt ihn in runde Klammern, erhält man die **Transportmatrix T** (Matrizen werden i. A. mit Großbuchstaben bezeichnet):

$$T = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 50 \\ 150 & 150 & 200 \\ 0 & 200 & 250 \\ 150 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat 4 Zeilen und 3 Spalten, man sagt dann kurz, sie habe die Größe 4×3. Besteht eine Matrix nur aus einer Zeile bzw. nur aus einer Spalte, so sprechen wir von einem (Zeilen- bzw. Spalten-) Vektor.

Hausaufgabe 32

Stellen Sie die Lieferbeziehungen in einem Transportdiagramm dar.

Die einzelnen Zahlen in der Matrix nennt man ihre **Elemente**. Sie werden mit dem entsprechenden Kleinbuchstaben bezeichnet und mit einem Doppelindex versehen. Dabei gibt die erste Zahl die Zeile, die zweite die Spalte an. In obiger Matrix ist z. B. $t_{13} = 50$, d. h. von K_1 werden an B_3 50 Tonnen geliefert. Welche Elemente sind 0?

2.1.2 Beispiel B: Herstellungsmatrix

Ein Unternehmen stellt 2 Endprodukte E_1 und E_2 in zweistufiger Produktion her. Aus den Rohstoffen R_1 und R_2 werden die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 gewonnen. Aus diesen wiederum werden die beiden Endprodukte E_1 und E_2 produziert.

Die erste Stückliste gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) der Rohstoffe (R) für die Herstellung *einer* ME des jeweiligen Zwischenprodukts (Z) notwendig sind.

Die zweite Stückliste gibt an, wie viele ME der Zwischenprodukte jeweils für die Herstellung *einer* ME der Endprodukte benötigt werden.

1. Stückliste	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	6	4
R_2	3	1	6

2. Stückliste	E_1	E_2
Z_1	2	1
Z_2	5	8
Z_3	2	4

Aus der ersten Stückliste erhalten wir die Herstellungsmatrix für die Zwischenprodukte, die sog. **RZ-Matrix**:

$$RZ = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

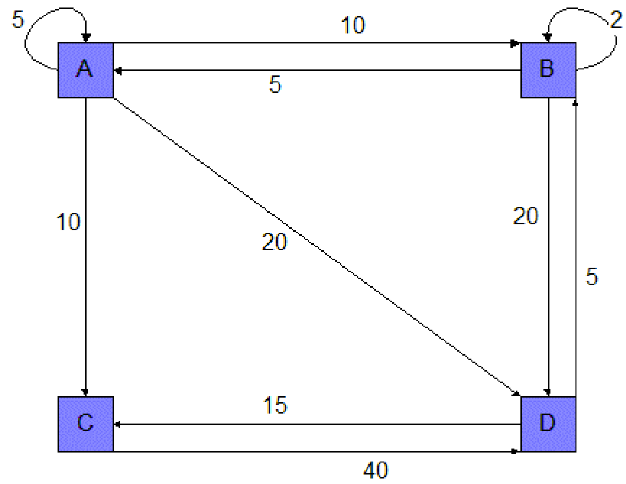
Form: 2×3. Es ist $rz_{13} = 4$, was bedeutet, dass von Rohstoff 1 4 ME zur Herstellung von *einer* Mengeneinheit von ZP 3 gebraucht werden. Ebenso bedeutet rz_{22}=…

Die Herstellungsmatrix für die Endprodukte leiten wir aus der zweiten Stückliste ab und nennen sie dementsprechend **ZE-Matrix**:

$$ZE = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2.1.3 Beispiel C: Input-Output-Matrix.

Eine Volkswirtschaft ist in 4 Produktionssektoren aufgeteilt, die sich untereinander beliefern (z. B. A = Landwirtschaft, B = Bergbau und Rohstoffgewinnung, C = Industrie und D = Dienstleistungen). Die einzelnen Lieferungen werden durch das nebenstehende Verflechtungediagramm wiedergegeben.



Aus dem Diagramm leiten wir die sog. Input-Output-Tabelle ab:

	geliefert nach				
geliefert von		A	B	C	D
	A	5	10	10	20
	B	5	2	0	20
	C	0	0	0	40
	D	0	5	15	0

Daraus erhalten wir die Input-Output-Matrix M dieser 4-Sektoren-Wirtschaft:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 & 20 \\ 5 & 2 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 5 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Sie hat die Form 4×4, ist also **quadratisch**. Die Diagonalelemente von links oben nach rechts unten bilden die sog. Hauptdiagonale, die andere Diagonale heißt Nebendiagonale.

Hausaufgabe 33

Betrachten Sie die Input-Output-Matrix $M = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 8 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 9 \\ 3 & 7 & 16 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie die Elemente an, die Null sind.

b) Zeichnen Sie das zugehörige Verflechtungsdiagramm.

Lösung:

a) .

b) .

2.1.4 Beispiel D: Koeffizientenmatrix

wie im Buch S. 487 Bsp. 7.5

Aus dem linearen Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{llll} 2x_1 & + 3x_2 & + 4x_3 & = 1 \\ 5x_1 & - 2x_2 & + 2x_3 & = 1 \\ x_1 & & - x_3 & = 2 \end{array}$$

mit 3 Gleichungen und 3 Variablen lässt sich die Koeffizientenmatrix A bilden, die nur aus den Zahlen der linken Seite besteht (die Namen der Variablen sind für die Lösung irrelevant):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bezieht man auch noch die Zahlen der rechten Seite ein, so erhält man die sog. **erweiterte** Koeffizientenmatrix:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Sie enthält die gesamte Information des ursprünglichen LGS und wir werden sie später benutzen, um das LGS systematisch zu lösen. Ihre Form ist 4×3.

2.2 Zusammenfassung der Beispiele

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen (oder ihren Platzhaltern), die in runde Klammern eingefasst ist.
Matrizen werden mit großen Buchstaben bezeichnet. Ihre Elemente dagegen mit dem entsprechenden Kleinbuchstaben. Eine Matrix A mit z Zeilen und s Spalten wird als zxs Matrix bezeichnet. Sie hat $z \cdot s$ Elemente. Das Element a_{ij} steht am Kreuzungspunkt der Zeile i und Spalte j (z. B. a_{23} in Zeile 2 an Stelle 3). Ist speziell z=s, so nennt man A quadratisch. Dann bilden die Elemente a_{ii} die Hauptdiagonale.

2.3 Vektoren und weitere Definitionen

In Bsp. D kann die rechte Seite als einspaltige Matrix geschrieben werden. Man nennt solche Matrizen Vektoren, hier speziell einen Spaltenvektor, und bezeichnet sie mit Kleinbuchstaben mit Vektorpfeil:

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Analog nennt man einzeilige Matrizen auch Zeilenvektoren. Z. B. die 1. Zeile in der Matrix A aus Bsp. D:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Die Elemente eines Vektors werden nur durch einen Index gekennzeichnet, also z. B. $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ und $a_3 = 4$. Solche Zahlen und Variablen nennt man auch **Skalare**, um den Unterschied zu Vektoren hervorzuheben.

Sind alle Elemente eines Vektors Null, so nennt man ihn den Nullvektor, geschrieben $\vec{O}$. Er entspricht der Zahl Null, ist aber formal ein Vektor.

Unter der **Einheitsmatrix** E versteht man eine quadratische Matrix passender Größe, deren Elemente auf der Hauptdiagonale 1 sind und alle anderen 0.

Schemazeichnung an die Tafel

Formal: $e_{ij} = 1$ wenn i=j und 0 sonst.

Matrizen mit nur einer Zeile (Spalte) nennt man <u>Zeilenvektor</u> (<u>Spaltenvektor</u>) und bezeichnet sie mit kleinen Buchstaben. Um sie von den Skalaren zu unterscheiden, schreiben wir über dem Buchstaben einen kleinen Pfeil, z. B. $\vec{a}$. Sind alle Elemente eines Vektors 0, so nennt man ihn den <u>Nullvektor</u> ($\vec{O}$). Unter der <u>Einheitsmatrix</u> E versteht man die quadratische Matrix, deren Elemente auf der Hauptdiagonalen 1 und alle anderen 0 sind. Ihre Größe wird von Fall zu Fall angepaßt.

Hausaufgabe 34

a) Die Nachbarskinder Anna, Berta und Claus sind von ihren Eltern gebeten worden, einige Lebensmittel einzukaufen. Anna soll 2 Liter Milch, 1 Pfund Butter, 1 Packung Eier und 5 Brötchen kaufen. Berta 4 ℓ Milch, 2 Pfund Butter und 8 Brötchen sowie Claus 1 ℓ Milch, 2 Pckg. Eier und 4 Brötchen. Stellen Sie die Einkäufe der 3 Kinder in einer geeigneten Matrix dar.

b) Erstellen Sie eine 4×4 Matrix, für deren Elemente gilt:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i \le j \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \quad \text{mit } i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Lösung:
a:

	.	.	.	.

.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

oder die transponierte Matrix.

b) $A=\begin{pmatrix} \# \\ \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix}$

2.4 Matrizenverknüpfungen

2.4.1 Addition und Subtraktion

Wir greifen zurück auf Bsp. A:

Transportmatrix für Jan (s. S. 50):

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 50 \\ 150 & 150 & 200 \\ 0 & 200 & 250 \\ 150 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für den Monat Februar sei die Transportmatrix nun

$$B = \begin{pmatrix} 150 & 200 & 100 \\ 100 & 200 & 150 \\ 50 & 100 & 200 \\ 100 & 100 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Monate Januar und Februar zusammen erhalten wir die Transporte durch Addition der entsprechenden Elemente:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 250 & 400 & 150 \\ 250 & 350 & 350 \\ 50 & 300 & 450 \\ 250 & 100 & 0 \end{pmatrix}$$

Man kann nur formgleiche Matrizen addieren. Dann werden die positionsgleichen Elemente addiert.

Analog ist die Differenz von Matrizen erklärt. Z. B. gibt die Matrix D = B - A die Unterschiede in den Mengen zwischen Februar und Januar an:

$$D = B - A = \begin{pmatrix} 150 & 200 & 100 \\ 100 & 200 & 150 \\ 50 & 100 & 200 \\ 100 & 100 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100 & 200 & 50 \\ 150 & 150 & 200 \\ 0 & 200 & 250 \\ 150 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 50 \\ -50 & 50 & -50 \\ 50 & -100 & -50 \\ -50 & 100 & 0 \end{pmatrix}$$

Zwei formgleiche Matrizen werden addiert (subtrahiert), indem man die positionsgleichen Elemente addiert (subtrahiert). Für Matrizen unterschiedlicher Form ist die Addition (Subtraktion) nicht definiert.

Bei der Addition ist die Reihenfolge egal, bei der Subtraktion erhält man die negative Matrix, wie bei Zahlen auch.

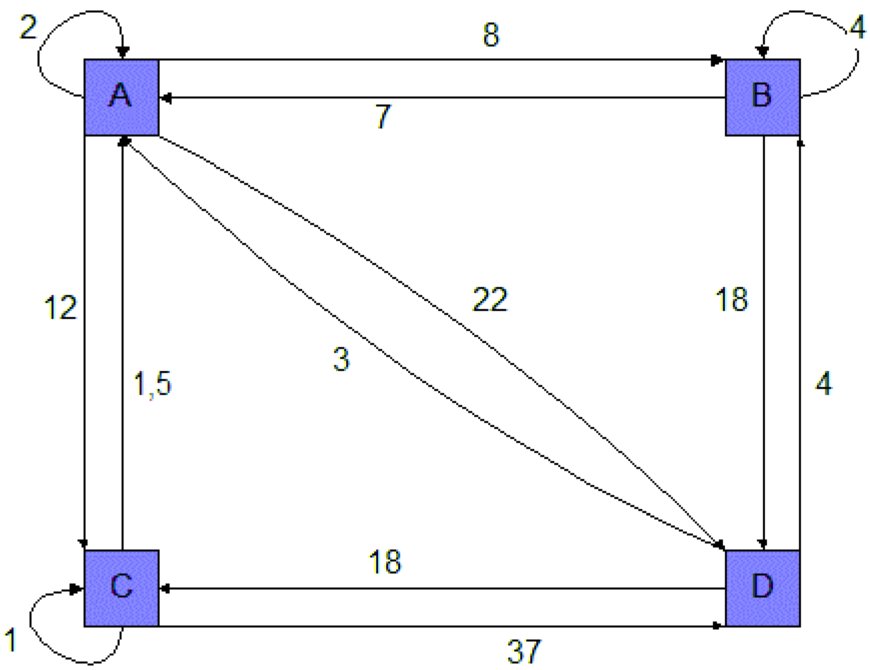
Formel 15: $A + B = B + A$

Formel 16: $A - B = -(B - A)$

Addition und Subtraktion lassen sich sinngemäß auf Vektoren übertragen, wobei aber Zeilen- und Spaltenvektoren nicht vermischt werden dürfen.

Hausaufgabe 35

Das Verflechtungsdiagramm von Bsp. C hat sich im Laufe der Jahre etwas geändert:



Erstellen Sie die Input-Output-Matrix!

Lösung: $M = \begin{pmatrix} & & & \# \\ & & & \# \\ & & & \# \\ & & & \# \end{pmatrix}$

2.4.2 Die S-Multiplikation

Das Bauunternehmen aus Bsp. A (s. S. 50) rechnet damit, dass die Liefermengen in den nächsten 7 Jahren alle um 50% steigen werden. Folglich müssen alle Elemente der Transportmatrix mit 1,5 multipliziert werden, um die Transportmatrix T_2 in 7 Jahren zu erhalten.

$$T_2 = 1{,}5 \cdot T = 1{,}5 \begin{pmatrix} 100 & 200 & 50 \\ 150 & 150 & 200 \\ 0 & 200 & 250 \\ 150 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 & 300 & 75 \\ 225 & 225 & 300 \\ 0 & 300 & 375 \\ 225 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Form der Matrix spielt bei der S-Multiplikation keine Rolle. Wir werden auch von dem Vielfachen bzw. von dem Bruchteil einer Matrix sprechen.

> Bei der S-Multiplikation wird jedes Element der Matrix A mit einer Zahl (Skalar) multipliziert. $s \cdot A = B$ wobei $b_{ij} = s \cdot a_{ij}$ ist. Entsprechendes gilt auch für Vektoren.

Anwendungsbeispiel: „Ausklammern" eines gemeinsamen Faktors:

$$\begin{pmatrix} 2\,^7/_8 & 5\,^1/_{16} \\ -^3/_4 & 3\,^5/_8 \end{pmatrix} = {^1/_8} \cdot \begin{pmatrix} 23 & 40\,^1/_2 \\ -6 & 29 \end{pmatrix}$$

2.4.3 Das Skalarprodukt zweier Vektoren

Ein Aktienanleger kauft an einem Tag 120 Aktien der Lufthansa, 50 Allianz und 20 Continental Aktien. Der Kurs der Lufthansa Aktie beträgt 13,30 €, der der Allianz Aktie 102,80 € und der der Continental Aktie 85,57 €. Wieviel hatte der Anleger für alle Aktien (ohne Gebühren) zu zahlen?

Wir ordnen die Kurse der Aktien in alphabetischer Reihenfolge in einem Zeilenvektor an:

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 102{,}80 & 85{,}57 & 13{,}30 \end{pmatrix}$$

Die Stückzahlen ordnen wir in gleicher Reihenfolge zu einem Spaltenvektor an:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Wir bilden nun die Summe der Produkte der Elemente von $\vec{k}$ und $\vec{s}$ an gleicher Stelle:

$$102{,}80 \cdot 50 + 85{,}57 \cdot 20 + 13{,}30 \cdot 120 = 5140 + 1711{,}40 + 1596 = 8447{,}40 \text{ €}$$

Das Ergebnis ist eine Zahl, also ein Skalar! Das so gebildete Produkt nennt sich **Skalarprodukt**. Schreibweise:

$$\vec{k} \cdot \vec{s} = 8447{,}40$$

Es wird manchmal auch Punktprodukt (engl. „dotproduct") genannt. Notwendige Bedingung ist, dass der Spaltenvektor soviele Zeilen besitzt wie der Zeilenvektor Spalten, d. h. beide Vektoren müssen gleich viele Zahlen enthalten. Der erste Faktor ist hierbei immer ein Zeilenvektor, der zweite Faktor ein Spaltenvektor.

Hausaufgabe 36

Eine Schülergruppe hat den Auftrag, für eine Klassenfahrt in die Lüneburger Heide die Verpflegung für den 1. Tag einzukaufen:
3 Flaschen Ketchup á 2,10 €,
3 Gläser Senf á 0,35 €,
100 Würstchen á 0,90 €,
100 Brötchen á 0,20 € und
30 Literflaschen Limonade á 0,75 €.

a) Ordnen Sie die Einzelpreise zu einem Zeilenvektor und die Mengen zu einem Spaltenvektor.

b) Bilden Sie das Skalarprodukt und interpretieren Sie es.

Lösung: S. 504 Nr. 8.

Übungsaufgabe: Bilde alle Skalarprodukte, die möglich sind:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 13 & -4{,}25 & 4^{9}/_{16} \end{pmatrix}$;

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\vec{r} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$\vec{a} \cdot \vec{s} = 2 - 12 = -10$; $\vec{s} \cdot \vec{a}$ geht nicht!

$\vec{b} \cdot \vec{r} = -6{,}5 - 12{,}75 + 18{,}25 = -1$

$\vec{c} \cdot \vec{t} = 20 - 3 = 17$

$\vec{d} \cdot \vec{u} = -2 - 12 + 18 - 4 = 0$ **!**

$\vec{d} \cdot \vec{u}$ ist Null, obwohl kein Faktor Null ist! Es gilt aber immer noch die Umkehrung:

Ist ein Faktor der Nullvektor, so ist das Skalarprodukt gleich Null.

> Das Skalarprodukt eines Zeilenvektors $\vec{a}$ mit einem Spaltenvektor $\vec{b}$, die beide n Elemente enthalten, ist definiert als die Zahl, die sich nach $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots a_n b_n$ berechnet. Die Reihenfolge der Faktoren ist nicht vertauschbar. Das Produkt kann Null ergeben, obwohl kein Faktor der Nullvektor ist!

Hausaufgabe 37

Bilden Sie das Skalarprodukt aus $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2{,}5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ -4 \end{pmatrix}$ so, dass das Ergebis 0 [1;-2] ist.

Lösung: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ mit x=;
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$ mit x= ;
$\vec{a}\cdot\vec{b} = -2$ mit x= .

2.4.4 Matrix mal Vektor

Der Aktienanleger kauft nun an zwei verschiedenen Tagen jeweils 120 Aktien der Lufthansa, 50 Allianz und 20 Continental Aktien. Die Kurse des ersten Tages übernehmen wir vom vorigen Beispiel, am 2. Tag ist Lufthansa auf 14,10 € gestiegen, Allianz auf 103,60 €, jedoch Continental auf 84,95 € gefallen. Wie hoch ist der Gesamtkaufpreis an den jeweiligen Tagen?

Für den ersten Tag hatten wir das Ergebnis ja schon berechnet: 8447,40 €. Für den zweiten Tag können wir eine analoge Rechnung ausführen:

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 103{,}60 & 84{,}95 & 14{,}10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{s} = 5180 + 1699 + 1692 = 8571$$

Man kann nun die Kurse an den beiden Tagen zu einer 2×3 Matrix zusammenfassen und dann eine Matrixmultiplikation definieren:

$$\begin{pmatrix} 102{,}80 & 85{,}57 & 13{,}30 \\ 103{,}60 & 84{,}95 & 14{,}10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5140 + 1711{,}40 + 1596 \\ 5180 + 1699 + 1692 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8447{,}40 \\ 8571 \end{pmatrix}$$

$$2\times3 \quad * \; 3\times1 \quad = \quad 2\times1$$

Das Ergebnis ist ein zweizeiliger Spaltenvektor. Seine erste Komponente entsteht aus dem Skalarprodukt der ersten Zeile der Kursmatrix mit dem Stückvektor usw.

Entsprechend lässt sich das Produkt auf mehrzeilige Matrizen erweitern.

Übungsaufgabe: Aus 3 Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3 werden 2 Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt, vergl. Bsp. B auf S. 51. Die ZE Matrix war

$$ZE = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Es liegt ein Auftrag für 85 Einh. E_1 und 63 Einh. E_2 vor. Wieviele Einheiten an Zwischenprodukten müssen dafür bereitstehen?

Um 1 Einh. E_1 herzustellen, brauchen wir 2 Einh. Z_1, 5 Einh. Z_2 und 2 Einh. Z_3. Für 85 Einh. von E_1 brauchen wir jeweils das 85fache, also
$2\cdot 85 = 170$ Einh. Z_1,
$5\cdot 85 = 425$ Einh. Z_2,
$2\cdot 85 = 170$ Einh. Z_3.

Für die Herstellung von E_2 kommen die 63fachen Mengen der Zwischenprodukte dazu, die in der 2. Spalte der der ZE-Matrix stehen:
$1\cdot 63 = 63$ Einh. Z_1,
$8\cdot 63 = 504$ Einh. Z_2,
$4\cdot 63 = 252$ Einh. Z_3.

Zusammen also 233 Einh. Z_1, 929 Einh. Z_2 und 422 Einh. Z_3. Ordnen wir die Rechnung nach Zwischenprodukten um, so erhalten wir:

$2\cdot 85 + 1\cdot 63$
$5\cdot 85 + 8\cdot 63$
$2\cdot 85 + 4\cdot 63$

Das Ergebnis erhalten wir wieder als Matrixprodukt der ZE-Matrix mit dem Auftragsvektor:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 85 \\ 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 85 + 1\cdot 63 \\ 5\cdot 85 + 8\cdot 63 \\ 2\cdot 85 + 4\cdot 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 233 \\ 929 \\ 422 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 38

Wieviele Einheiten an Rohstoffen werden zur Bearbeitung dieses Auftrags gebraucht? Daten aus Bsp. B.

Lösung: $\begin{pmatrix} & \# \\ & \# \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \# \\ \# \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$

Übungsaufgabe: Eine Möbelfabrik fertigt 5 Schrankmodelle (Modell A…E) aus den Grundelementen Korpus, Tür, Einlegeböden und Schubladensatz. Die Tabelle gibt an, wieviele Grundelemente in einen Schrank verbaut werden (Folie auflegen):

	A	B	C	D	E
Korpus	1	1	1	1	1
Türen	0	0	1	1	2
Einlegeböden	3	0	3	3	6
Schubladensatz	1	2	0	1	0

Es liegt nun ein Auftrag vor für 20 Stück A, 25 B, 40 C, 50 D und 70 E. Berechnen Sie die benötigten Grundelemente mit Hilfe des Matrixprodukts!

Lösung: Aus der Tabelle gewinnen wir in naheliegender Weise die Grundelemente Matrix G:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren wir diese Matrix mit dem Auftragsvektor, so erhalten wir als Ergebnis gerade die Anzahl der Grundelemente in der Reihenfolge wie in der Tabelle angegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 40 \\ 50 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 205 \\ 230 \\ 750 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Korpi} \\ \text{Türen} \\ \text{Einlegeböden} \\ \text{Schubladens.} \end{pmatrix}$$

2.4.5 Vektor mal Matrix

Ein Börsenmakler kauft an einem Tag für 4 Kunden Allianz, Continental und Lufthansa Aktien zu den Tageskursen 101,70 €, 88,30 € und 13,10 €.

Der 1. Kunde ordert 25 Allianz Aktien, 30 Continental und 250 Lufthansa Aktien.
Der 2. Kunde ordert 30 Allianz, 35 Continental und 400 Lufthansa.
Der 3. Kunde ordert 18 Allianz, 32 Continental und 300 Lufthansa.
Der 4. Kunde ordert 40 Allianz, 80 Continental und 150 Lufthansa.
Berechnen Sie, welche Kaufpreise (ohne Gebühren) den Kunden jeweils in Rechnung gestellt werden!

Wir fassen die Kundenaufträge spaltenweise zu einer Matrix zusammen, die 1. Spalte für den 1. Kunden, die 2. für den 2. Kunden usw. Die Zeilen geben die gewünschten Stückzahlen in alphabetischer Reihenfolge wieder.

Die Kurse fassen wir wie bisher zu einem Zeilenvektor zusammen. Wir definieren nun ein Produkt eines Zeilenvektors (1. Faktor) mit einer Matrix, indem der Zeilenvektor nacheinander skalar mit den Spaltenvektoren der Matrix multipliziert wird. Als Ergebnis erhalten wir einen Zeilenvektor mit so vielen Elementen wie die Matrix Spalten hat. Rechnung:

$$\begin{pmatrix} 101{,}70 & 88{,}30 & 13{,}10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 30 & 18 & 40 \\ 30 & 35 & 32 & 80 \\ 250 & 400 & 300 & 150 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8466{,}50 & 11381{,}50 & 8586{,}20 & 13097 \end{pmatrix}$$

Der Zeilenvektor gibt direkt für jeden Kunden den Rechnungsbetrag an.

Hausaufgabe 39

Ein Börsenmakler kauft an einem Tag für 2 Kunden Aktien von Drägerwerk zu 76,30 €, Beiersdorf zu 62,25 €, Daimler zu 39,50 € und RWE zu 31,90 €. Kunde 1 ordert 40 Dräger, 25 Beiersdorf, 50 Daimler und 75 RWE Aktien. Kunde 2 ordert 60 Dräger, 20 Beiersdorf, 100 Daimler und 60 RWE Aktien. Berechnen Sie, wieviel jeder Kunde zu zahlen hat.

Lösung: $\begin{pmatrix} & \# \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \# \\ \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} & \# \end{pmatrix}$ 0,5% Gebühren als Anwendung der S-Multipl.

Hausaufgabe 40

Bilden Sie alle möglichen Produkte: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung: ; $= \begin{pmatrix} & \# \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} \# \\ \# \end{pmatrix} \neq$

obwohl gleiche Zahlen in a und b!

$= \begin{pmatrix} \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} \# \\ \# \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} \# \\ \# \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix}$

2.4.6 Matrix mal Matrix

Unser Börsenmakler kauft nun an zwei Tagen für 4 Kunden Allianz, Continental und Lufthansa Aktien zu den jeweiligen Tageskursen in gleicher Stückzahl. Die Kurse an den beiden Tagen übernehmen wir aus dem Beispiel Matrix mal Vektor (s. S. 59):

$$\begin{array}{ccc} \text{Allianz} & \text{Conti} & \text{Lufthansa} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 102{,}80 & 85{,}57 & 13{,}30 \\ 103{,}60 & 84{,}95 & 14{,}10 \end{pmatrix}$$

Die Stückzahlen übernehmen wir aus dem Beispiel Vektor mal Matrix (2.4.5, s. S. 61):

$$\begin{array}{cccc} \text{Kd. 1} & \text{Kd. 2} & \text{Kd. 3} & \text{Kd. 4} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 25 & 30 & 18 & 40 \\ 30 & 35 & 32 & 80 \\ 250 & 400 & 300 & 150 \end{pmatrix}$$

Welchen Betrag hat jeder Kunde am jeweiligen Tag zu zahlen?

Dazu bilden wir wieder das Produkt Kurse mal Stückzahlen:

$$\begin{pmatrix} 102{,}80 & 85{,}57 & 13{,}30 \\ 103{,}60 & 84{,}95 & 14{,}10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 30 & 18 & 40 \\ 30 & 35 & 32 & 80 \\ 250 & 400 & 300 & 150 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8462{,}10 & 11398{,}95 & 8578{,}64 & 12952{,}60 \\ 8663{,}50 & 11721{,}25 & 8813{,}20 & 13055 \end{pmatrix}$$

Das Produkt der beiden Matrizen A und B sei die Matrix C: $C = A \cdot B$. Dazu muss die Zeilenzahl von B mit der Spaltenzahl von A übereinstimmen. C enthält dann soviele Zeilen wie A und soviele Spalten wie B. Jedes Element c_{ij} von C ergibt sich als Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem j-ten Spaltenvektor von B. Insbesondere darf A auch nur ein Zeilenvektor bzw. B nur ein Spaltenvektor sein.

Übungsaufgabe: Welche Form hat das Ergebnis, sofern es überhaupt berechnet werden kann?

a) $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$ geht nicht

c) $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$ geht nicht

f) $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$

g) $2 \times 4 * 4 \times 3 = 2 \times 3$

h) $n \times k * k \times s = n \times s$

Übungsaufgabe: Zu Bsp. B (s. S. 51) und Hausaufgabe 38: Wie lassen sich die Mengen an Rohstoffen für die Endprodukte (85 Einh. E_1 und 63 Einh. E_2) in einem Schritt berechnen, also *ohne* zuvor die Zwischenprodukte zu berechnen?

Es war $RZ = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ und $ZE = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Danach benötigen wir für 1 Einh. von E_1:

von R_1: $2\cdot 2 + 6\cdot 5 + 4\cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 42$ Einh.

von R_2: $3\cdot 2 + 1\cdot 5 + 6\cdot 2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 23$ Einh.

Für 1 Einh. von E_1 können wir die Rohstoffe also folgendermaßen berechnen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Analog überlegt man sich, dass man für 1 Einh. von E_2 die Rohstoffe

$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 35 \end{pmatrix}$ braucht.

Beide Rechnungen fassen wir zusammen:

$$RZ\cdot ZE = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 66 \\ 23 & 35 \end{pmatrix} = RE \text{ Herstellungsmatrix}$$

Interpretation: 1. Spalte für E_1, 2. Spalte für E_2
1. Zeile von R_1, 2. Zeile von R_2.

Benötigen wir 1 Einh. E_1 und 1 Einh. E_2, so werden die Rohstoffmengen

$$\begin{pmatrix} 42 & 66 \\ 23 & 35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108 \\ 58 \end{pmatrix}$$

gebraucht. Für den Auftrag von 85 Einh. von E_1 und 63 Einh. E_2 braucht man demzufolge

$\begin{pmatrix} 42 & 66 \\ 23 & 35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 85 \\ 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7728 \\ 4160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ (= Ergebnis von Hausaufgabe 38)

Herstellungsmatrix (RE) × Auftragsvektor = Herstellungsvektor

Hausaufgabe 41

Die drei Sparer Erich, Vanessa und Björn zahlen quartalsweise in 2 Fondssparpläne (A und B) ein. Die Preise der Fondsanteile und die angelegten Fondsanteile sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

	Preise			Sparpläne (Stück Anteile)		
	A	B		Erich	Vanessa	Björn
Q1	85,50	14,10	A	2	1	1
Q2	82,-	14,80	B	10	15	20
Q3	84,90	15,10				
Q4	87,60	15,50				

Erstellen Sie eine Matrix, aus der die Einzahlungen der 3 Sparer quartalsweise hervorgehen.

Lösung: $\begin{pmatrix} & * \\ & * \\ & * \\ & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & * \\ & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & * \\ & * \\ & * \\ & * \end{pmatrix}$

Zusatzfrage bei der Besprechung:
Wie kann man im Matrixkalkül die Jahressummen für jeden Sparer bilden?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & * \\ & * \\ & * \\ & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1275 & 1232{,}50 & 1530 \end{pmatrix}$$

Übungsaufgabe: Bezogen auf Bsp. B: Wieviele Einheiten von E_1 und E_2 lassen sich noch herstellen, wenn 1194 Einh. von R_1 und 639 Einh. von R_2 vorhanden sind?

Wir setzen an:

$$\begin{pmatrix} 42 & 66 \\ 23 & 35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1194 \\ 639 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich 2 Gleichungen für die beiden Unbekannten E_1 und E_2:

I	$42\ E_1$	$+\ 66\ E_2$	$= 1194$	$\mid : 42$
II	$23\ E_1$	$+\ 35\ E_2$	$= 639$	

Lösung nach dem Gaußschen Verfahren:

I/42=I′	E_1	$+\ {}^{11}/_{7}\ E_2$	$= {}^{199}/_{7}$	$\mid \cdot(-23) + \mathrm{II}$
III	$0 \cdot E_1$	$-\ {}^{8}/_{7} \cdot E_2$	$= -{}^{104}/_{7}$	$\mid \cdot(-{}^{7}/_{8})$
III′		E_2	$= 13$	$\mid \cdot(-{}^{11}/_{7}) + \mathrm{I}'$
IV	E_1	$+\ 0 \cdot E_2$	$= 8$	

Probe: $\begin{pmatrix} 42 & 66 \\ 23 & 35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 336+858 \\ 184+455 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1194 \\ 639 \end{pmatrix}$

Hausaufgabe 42

a) Wieviel an Rohstoffen benötigt man, um 18 Ein. von E_1 und 6 Einh. von E_2 herzustellen?

b) Wieviele Einheiten von E_1 und E_2 lassen sich herstellen, wenn von R_1 noch 3996 Einh. und von R_2 noch 2154 Einh. vorhanden sind?

Lösung:
a) .

b) ;

;

;

;

;

;

;

;

Probe machen!

Übungsaufgabe: Bilden Sie alle möglichen Produkte:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 9 & 26 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 0 \\ 6 & -7 \end{pmatrix};\ \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 135 & -38 \\ 342 & 667 \end{pmatrix};\ A\cdot B = \begin{pmatrix} 70 & 62 \\ 106 & 314 \end{pmatrix};\ A\cdot C = \begin{pmatrix} 21 & 1 & 8 \\ 96 & -26 & 113 \end{pmatrix};$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 126 & 150 \\ 114 & 258 \end{pmatrix};\ B^2 = \begin{pmatrix} 48 & 96 \\ 32 & 112 \end{pmatrix} = 8\cdot\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 4 & 14 \end{pmatrix};\ B\cdot C = \begin{pmatrix} 30 & -6 & 30 \\ 34 & -10 & 42 \end{pmatrix};$$

$$C\cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 13 & -16 \end{pmatrix};$$

$$D\cdot A = \begin{pmatrix} 12 & 106 \\ 60 & -5 \\ 9 & -188 \end{pmatrix};\ D\cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 28 \\ 30 & 30 \\ 22 & -34 \end{pmatrix};\ D\cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 14 \\ 10 & 0 & 5 \\ -9 & 7 & -22 \end{pmatrix};$$

$$\vec{e}\cdot D = \begin{pmatrix} -15 & 15 \end{pmatrix} = 15\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

N. B.: A·B und B·A haben verschiedene Ergebnisse!

Sei G eine n×k Matrix und H eine k×n Matrix. Dann lassen sich die beiden Produkte G·H und H·G bilden, aber sie fallen verschieden aus (in den Beispielen C·D und D·C). Dies gilt auch für den Sonderfall n=k, d. h. zwei quadratische Matrizen (in den Beispielen A und B). Das Kommutativgesetz gilt für das Matrixprodukt <u>nicht</u>!

Übungsaufgabe: Die Schüler bilden in zwei Gruppen A·E bzw. E·A und erhalten jeweils wieder A.

Hausaufgabe 43

In einem Unternehmen werden aus 6 Einzelteilen E_1 … E_6 3 Bauteile hergestellt. Die Stücklisten für die Bauteile sind in der Tabelle zusammengefasst.

a) Wie viele Einzelteile werden wöchentlich benötigt, wenn 80 Stück von B_1, 70 Stück von B_2 und 130 Stück von B_3 pro Woche gefertigt werden sollen?

b) Wie hoch sind die Kosten für die Einzelteile je Bauteil bei den in der Tabelle angegebenen Stückkosten?

	Kosten	B_1	B_2	B_3
E_1	15	1	2	8
E_2	22,50	2	0	0
E_3	17,20	3	2	0
E_4	12,30	0	7	0
E_5	24,30	0	2	4
E_6	52,80	4	2	1

c) Wie hoch sind die wöchentlichen Kosten für den Bezug der Einzelteile, wenn die Stückzahlen aus a) produziert werden?

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \# \\ \# \\ \# \\ \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix}$;

b) $(\qquad \#) \cdot =$
$(\quad \#)$

c) $(\quad \#) \cdot \begin{pmatrix} \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix} =$ €.

Alternativ: aus a).

2.5 Anwendungen der Matrixrechnung

2.5.1 Kostenrechnung

Stücklisten aus Bsp. B:

$$RZ = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix};\ ZE = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Kosten der Rohstoffe je ME und von den Rohstoffkosten unabhängige Kosten für die Herstellung der Zwischenprodukte (z. B. Arbeitskosten) sowie Kosten der Endprodukte und Fixkosten pro Monat:

R_1	R_2	Z_1	Z_2	Z_3	E_1	E_2	Fix
6	8	5	7	4	12	20	980

Produktion pro Monat: $10 \times E_1$ und $30 \times E_2$.

1 Berechnung der Produktionskosten

1.1 Kosten der Zwischenprodukte

1.1.a Materialkosten

$\begin{pmatrix} 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot RZ = \begin{pmatrix} 36 & 44 & 72 \end{pmatrix}$

1.1.b Arbeits- und Maschinenkosten

gegeben: $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

1.1.c Gesamtkosten der Zwischenprodukte je Einh.:

$\begin{pmatrix} 36 & 44 & 72 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 51 & 76 \end{pmatrix}$

1.2 Kosten der Endprodukte

1.2.a Materialkosten durch die Zwischenprodukte:

$\begin{pmatrix} 41 & 51 & 76 \end{pmatrix} \cdot ZE = \begin{pmatrix} 489 & 753 \end{pmatrix}$

1.2.b Arbeits- und andere Kosten: $\begin{pmatrix} 12 & 20 \end{pmatrix}$

1.2.c Gesamtkosten der Endprodukte je Einh. (var. Stückkosten):

$\begin{pmatrix} 489 & 753 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 501 & 773 \end{pmatrix}$

1.3 Kosten für die gesamte Produktion pro Monat:

1.3.a Variable Kosten

$\begin{pmatrix} 501 & 773 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} = 28200,-$

1.3.b Fixkosten (gegeben): 980,-

1.3.c Gesamtkosten im Monat: 28200+980 = 29180

2 Preise, Umsatz und Gewinn

2.1 Marktpreise für die Endprodukte: E_1: 819 und E_2: 783

2.2 Umsatz im Monat:

$\begin{pmatrix} 819 & 783 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} = 31680$

2.3 Gewinn G=U-K = 31680 - 29180 = 2500

Hausaufgabe 44

Bezug ist Hausaufgabe 34 Teil a) „Die Nachbarskinder Anna…“. Die Preise seien 1 ℓ Milch: 0,80 €, 1 Pfund Butter: 1,10 €, 1 Packg. Eier: 1,80 €, 1 Brötchen: 0,25 €. Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Matrizenrechnung:

a) welche Mengen an Milch, Butter usw. die Kinder insges. gekauft haben;

b) wie viel Euro jedes Kind bezahlen musste;

c) wie hoch der gesamte Kaufpreis aller Kinder war.

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} & \# \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & \# \\ & \# \\ & \# \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \# \\ & \# \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} & \# \\ & \# \\ & \# \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \# \\ \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix}$

c) $(\quad \#) \cdot \begin{pmatrix} \# \\ \# \\ \# \end{pmatrix} = $ €.

Hausaufgabe 45

Bezug ist die Kosten und Gewinnberechnung aus dem Unterricht. Ein Jahr später haben sich die Kosten wie folgt geändert:

R_1	R_2	Z_1	Z_2	Z_3	E_1	E_2
6,75	7,90	5,30	7,20	4,10	12,40	17,20

Führen Sie die Berechnungen mit diesen Werten erneut durch.

Lösung s. Excel Datei HA49_Kosten.xls.

2.5.2 Deckungsbeitrag

Deckungsbeitrag = Verkaufspreis - var. Stückkosten

Wir setzen das vorige Beispiel fort:

Var. Stückkosten für die Endprodukte: $\begin{pmatrix} 501 & 773 \end{pmatrix}$

db = $\begin{pmatrix} 819 & 783 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 501 & 773 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 318 & 10 \end{pmatrix}$

Gesamtdeckungsbeitrag im Monat:

DB = $\begin{pmatrix} 318 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} = 3480$ € monatlich

Gewinn = Deckungsbeitrag - Fixkosten

G = 3480 - 980 = 2500 €

Übungsaufgabe: Ein Betrieb verarbeitet 3 Rohstoffe zu 3 Zwischenprodukten und diese dann zu 3 Endprodukten. Stücklisten:

	Z1	Z2	Z3
R1	1	4	3
R2	2	3	4
R3	1	2	2

	E1	E2	E3
Z1	2	3	4
Z2	1	2	2
Z3	2	5	8

Weitere Daten (Kosten, Preise):

	R1	R2	R3	Z1	Z2	Z3	Fix
Kosten	10	15	20	80	100	120	40000

	E1	E2	E3
Kosten	410	510	620
Produktion	62	175	150
Preise	2000	3000	3500

Rechnung:

1 Produktionskosten

1.1 Kosten der Zwischenprodukte

1.1.a Materialkosten
Rohstoffkostenvektor × RZ-Matrix

$$\begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} 60 & 125 & 130 \end{pmatrix}$$

1.1.b zuzüglich Fertigungskosten der Produktion der Zwischenprodukte

$$+ \qquad \begin{pmatrix} 80 & 100 & 120 \end{pmatrix}$$

1.1.c Gesamtkosten der Zwischenprodukte:

$$\begin{pmatrix} 140 & 225 & 250 \end{pmatrix}$$

1.2 Kosten der Endprodukte

1.2.a durch die Zwischenprodukte (Materialkosten):

Zwischenproduktekostenvektor × ZE-Matrix

$$\begin{pmatrix} 140 & 225 & 250 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} 1005 & 2120 & 3010 \end{pmatrix}$$

1.2.b zuzüglich Arbeitskosten usw. der Endprodukte:

$$+ \qquad \begin{pmatrix} 410 & 510 & 620 \end{pmatrix}$$

1.2.c Gesamtkosten der EP je Einh. (=var. Stückkosten):

$$\begin{pmatrix} 1415 & 2630 & 3630 \end{pmatrix}$$

2 Deckungsbeitrag und Gewinn

2.1 Deckungsbeitrag je ME = Preis - var. Stückkosten

Preise:	$\begin{pmatrix} 2000 & 3000 & 3500 \end{pmatrix}$
- var. Stückkosten	$\begin{pmatrix} 1415 & 2630 & 3630 \end{pmatrix}$
= db je ME	$\begin{pmatrix} 585 & 370 & -130 \end{pmatrix}$

2.2 DB für die Gesamtproduktion:

DB-je-ME-Vektor × Produktionsvektor

$$\begin{pmatrix} 585 & 370 & -130 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 62 \\ 175 \\ 150 \end{pmatrix} = 81520$$

2.3 Gewinn

Gewinn = Gesamt-DB - Fixkosten

G = 81520 - 40000 = 41520,-

Hausaufgabe 46

Buch S. 508 Nr. 24

Lösung s. Excel Datei HA50_Kosten.xls

Das Produkt aus der RZ-Matrix und der ZE-Matrix ergibt die RE-Matrix. An einem Beispiel nachvollziehen. Diese Kenntnis ist notwendig für die…

Hausaufgabe 47

Buch S. 508 Nr. 23 a-c

Lösung s. Excel Datei HA51.xls

Hausaufgabe 48

Buch S. 508 Nr. 23 Rest

Lösung s. Excel Datei HA51.xls Rückseite

2.5.3 Lineare Gleichungssysteme

Wir wenden die Matrizenrechnung nun auf die Lösung linearer Gleichungssysteme (LGS) an. Dabei werden wir das Gaußsche Eliminationsverfahren kennenlernen.

Beispiel: Aus 3 Einzelteilen T_1, T_2 und T_3 werden 3 Produkte P_1, P_2 und P_3 hergestellt nach folgender Stückliste:

	P_1	P_2	P_3
T_1	3	3	5
T_2	2	6	4
T_3	4	2	8

Die Produktion soll nun auslaufen. Dabei sollen die vorhandenen Teile (250 Stück von T_1, 221 Stück von T_2 und 330 Stück von T_3 möglichst vollständig verbraucht werden. Gesucht werden nun die produzierten Mengen der Produkte p_1, p_2 und p_3.

2.5.3.1 Lösung als lineares Gleichungssystem

I	$3p_1 +$	$3p_2 +$	$5p_3$	$=$	250	| :3
II	$2p_1 +$	$6p_2 +$	$4p_3$	$=$	221	
III	$4p_1 +$	$2p_2 +$	$8p_3$	$=$	330	

I′	$p_1 +$	$p_2 +$	$^5/_3 p_3$	$=$	$83^1/_3$	| $\cdot(-2)$+II | $\cdot(-4)$+III
IV=(-2)·I′+II		$4p_2 +$	$^2/_3 p_3$	$=$	$54^1/_3$	
V=(-4)·I′+III		$-2p_2 +$	$1^1/_3 p_3$	$=$	$-3^1/_3$	

Die erste Zeile bleibt jetzt unverändert. Sie kann gestrichen werden. Mit dem Rest verfahren wir in gleicher Weise weiter.

I′	$p_1 +$	$p_2 +$	$^5/_3 p_3$	$=$	$83^1/_3$	
IV′=IV:4		$p_2 +$	$^1/_6 p_3$	$=$	$13^7/_{12}$	| $\cdot 2$+V

VI=IV'·2+V	$\frac{5}{3}p_3$	=	$23\frac{5}{6}$	$\mid \cdot\frac{3}{5}$
VI'	p_3	=	14,3	

Das LGS bestehend aus I', IV' und VI' hat jetzt obere Dreiecksgestalt (Ende der Phase 1). Wir könnten es nun von unten her auflösen. Wir gehen aber noch einen Schritt weiter und stellen in der Phase 2 auch noch p_2 und p_1 frei.

Dabei fangen wir **von unten** an zu schreiben!

IIX=$-\frac{5}{3}$·VI'+I'	p_1 +	p_2 +		=	59,5	
VII=$-\frac{1}{6}$·VI'+IV'		p_2 +		=	11,2	
VI'			p_3	=	14,3	$\mid \cdot -\frac{1}{6}$+IV' $\mid \cdot -\frac{5}{3}$+I'

Im letzten Schritt eliminieren wir noch p_2 aus Gl. IIX mit Hilfe von Gl. VII:

IX=-1·VII+IIX	p_1			=	48,3	
VII		p_2 +		=	11,2	$\mid \cdot(-1)$+IIX
VI'			p_3	=	14,3	

Damit haben wir alle Variablen freigestellt und können die Lösung direkt ablesen:

$p_1 = 48{,}3$; $p_2 = 11{,}2$ und $p_3 = 14{,}3$. Wenn nur ganzzahlige Lösungen (Stückzahlen) zugelassen sind, können also 48 Stück von P_1, 11 Stück von P_2 und 14 Stück von P_3 hergestellt werden. Etwas bliebe dann noch übrig.

Hausaufgabe 49

Berechnen Sie die Reste der Einzelteile.

Lösung: .

2.5.3.2 Lösung im Matrizenkalkül

Wir definieren die Vektoren

$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{t} = \begin{pmatrix} 250 \\ 221 \\ 330 \end{pmatrix}$ und die Koeffizientenmatrix A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Dann lässt sich das LGS schreiben als

$A\cdot\vec{p} = \vec{t}$ oder ausführlich (*)

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 221 \\ 330 \end{pmatrix}$$

Die sog. erweiterte Koeffizientenmatrix enthält zusätzlich noch die rechte Seite:

$$(A|\vec{t}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & | & 250 \\ 2 & 6 & 4 & | & 221 \\ 4 & 2 & 8 & | & 330 \end{pmatrix}$$

An dieser Matrix führen wir jetzt die gleichen Rechenoperationen erneut aus. Am Ende wird auf der rechten Seite die Lösung stehen.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & | & 250 \\ 2 & 6 & 4 & | & 221 \\ 4 & 2 & 8 & | & 330 \end{pmatrix} \qquad | :3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ^5/_3 & | & 83^1/_3 \\ 0 & 4 & ^2/_3 & | & 54^1/_3 \\ 0 & -2 & 1^1/_3 & | & -3^1/_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} | *(-2)+2.\ \text{Zeile}\ | *(-4)+3.\ \text{Zeile} \\ | :4 \end{array}$$

Die erste Zeile und Spalte bleibt fortan (bis zum Ende der Phase 1) unverändert und kann gedanklich gestrichen werden. Mit dem Rest verfahren wir wieder genauso.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ^5/_3 & | & 83^1/_3 \\ 0 & 1 & ^1/_6 & | & 13^7/_{12} \\ 0 & 0 & 1^2/_3 & | & 23^5/_6 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} | *2+3.\text{Zl.} \\ | *^3/_5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ^5/_3 & | & 83^1/_3 \\ 0 & 1 & ^1/_6 & | & 13^7/_{12} \\ 0 & 0 & 1 & | & 14{,}3 \end{pmatrix}$$

An dieser Stelle ist die Phase 1 beendet. Die Matrix A hat obere Dreiecksform angenommen. Wir könnten die Unbekannten jetzt von unten her auflösen. Wir machen aber noch weiter und starten jetzt die Phase 2, um die Matrix A in die Einheitsmatrix zu überführen. Dann haben wir alle Unbekannten direkt freigestellt.

In der Phase 2 arbeiten (**und schreiben**) wir von unten nach oben.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ^5/_3 & | & 83^1/_3 \\ 0 & 1 & ^1/_6 & | & 13^7/_{12} \\ 0 & 0 & 1 & | & 14{,}3 \end{pmatrix} \qquad |*(-^1/_6)+ 2.\ \text{Zl.}\ |*(-^5/_3)+1.\ \text{Zl.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 59^1/_2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 11^1/_5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 14{,}3 \end{pmatrix} \qquad |*(-1)+1.\text{Zl.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 48{,}3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 11^1/_5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 14{,}3 \end{pmatrix}$$

Am Ende der Phase 2 ist A in die Einheitsmatrix umgeformt worden. Die Gl. (∗) lautet nun ($\vec{t}'$ sei der umgewandelte $\vec{t}$ Vektor):

$A'\cdot\vec{p} = \vec{t}'$ bzw. $E\cdot\vec{p} = \vec{t}'$ bzw. $\vec{p} = \vec{t}'$ (da $E\cdot\vec{p}=\vec{p}$) bzw. ausführlich

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48{,}3 \\ 11^1/_5 \\ 14{,}3 \end{pmatrix}$$

Als **ganzzahlige** Lösung ergibt sich also wieder

$p_1 = 48$; $p_2 = 11$; $p_3 = 14$ bzw. als Vektor

$$\vec{p}_{ganz.} = \begin{pmatrix} 48 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Die Reste erhalten wir so:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 247 \\ 218 \\ 326 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 250 \\ 221 \\ 330 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 247 \\ 218 \\ 326 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Prüfen, ob es noch einmal mehr geht! Damit kann man noch 1 P_1 mehr produzieren, dann bleibt als Rest:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Prüfung ist erforderlich, da wir auf ganze Zahlen **ab**gerundet haben!

Gaußsches Eliminationsverfahren:

Es sei A die (quadratische) Koeffizientenmatrix und $(A|\vec{b})$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines LGS aus n Gleichungen für n Unbekannte $x_1, x_2, \ldots x_n$.

1. Phase: Die 1. Zeile von $(A|\vec{b})$ wird durch a_{11} geteilt. Von der neuen 1. Zeile werden Vielfache zu den Zeilen darunter addiert mit dem Ziel, die Elemente in der 1. Spalte unter a_{11} (also $a_{21} \ldots a_{n1}$) zu Null zu machen. Das gleiche Verfahren wird nun auf die Untermatrix von $(A|\vec{b})$ angewendet, die durch Streichen der 1. Zeile und 1. Spalte entsteht usw. Am Ende der 1. Phase hat A die obere Dreiecksform und in der Hauptdiagonalen stehen lauter Einsen.

2. Phase: Von der untersten Zeile werden Vielfache zu allen Zeilen darüber addiert mit dem Ziel, die Elemente in der letzten (n-ten) Spalte von A zu Null zu machen. Das gleiche Verfahren wird nun auf die Untermatrix von $(A|\vec{b})$ angewendet, die durch Streichen der untersten Zeile und der n-ten Spalte entsteht (d. h. der letzten Spalte von A). Am Ende der 2. Phase ist A in die $n \times n$ Einheitsmatrix überführt worden. Der Vektor der rechten Seite (d. h. die letzte Spalte von $(A|\vec{b})$) ist dabei in den Lösungsvektor übergegangen.

2.5.4 Übungsaufgaben zu LGS

Übungsaufgabe: Steckbriefaufgabe (S. 519 Bsp. 7.27)

Die Kosten K eines Unternehmens sollen in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x durch ein Polynom 3. Grades
$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
dargestellt werden. Man kann davon ausgehen, dass die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 10 ME minimal sind und 200 € betragen. Die Gesamtkosten bei dieser Produktionsmenge machen 6000 € aus. Die Fixkosten werden mit 3400 € veranschlagt. Berechnen Sie die Koeffizienten a-d mit Hilfe des Matrizenkalküls.

Lösung:

1. Schritt: Bedingungen in mathematische Gleichungen fassen:

Grenzkosten bei x=10 minimal:

$K'(10)$ ist minimal $\Rightarrow$

I $\quad K''(10) = 0$

Grenzkosten bei x=10 betragen 200 €:

II $\quad K'(10) = 200$

Gesamtkosten bei x=10 sind 6000 €:

III $\quad K(10) = 6000$

Fixkosten = 3400 €:

IV $\quad K(0) = 3400$

4 Gleichungen reichen aus, um die 4 Unbekannten a-d zu bestimmen.

2. Schritt: Ansatz für die gesuchte Funktion: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (vorgegeben)

3. Schritt: Bedingungen mit der Funktion ausformulieren:

Vorweg werden die nötigen Ableitungen gebildet:

$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$K''(x) = 6ax + 2b$

I $\quad 60a + 2b = 0$

II $\quad 300a + 20b + c = 200$

III $\quad 1000a + 100b + 10c + d = 6000$

IV $\quad 0a + 0b + 0c + d = 3400$

Aus IV ergibt sich schon: d = 3400. Einsetzen in die anderen Gleichungen:

III $\quad 1000a + 100b + 10c + 3400 = 6000 \quad | - 3400$

III' $\quad 1000a + 100b + 10c = 2600$

Das LGS besteht nun nur noch aus den Gl. I, II und III':

I	$60a + 2b$	$= 0$
II	$300a + 20b + c$	$= 200$
III'	$1000a + 100b + 10c$	$= 2600$

4. Schritt: Überführen Sie das LGS in Matrixschreibweise und lösen Sie es nach dem Gaußschen Verfahren.

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 60 & 2 & 0 & 0 \\ 300 & 20 & 1 & 200 \\ 1000 & 100 & 10 & 2600 \end{array}\right)$$

Lösungsschritte:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/30 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 200 \\ 0 & 66\ \ 2/3 & 10 & 2600 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/30 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}1 & 20 \\ 0 & 0 & 3\ \ 1/3 & 1266\ \ 2/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/30 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 380 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 1 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 380 \end{array}\right)$$

Zu Bedingung I gibt es noch eine zweite (sog. hinreichende) Bedingung:

$K'''(10) \neq 0$

$K'''(x) = 6a$

Diese Bedingung ist aber erfüllt, da $a \neq 0$ sein muss (sonst wäre es kein Polynom 3. Grades mehr).

Lösungsvektor:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -18 \\ 380 \\ 3400 \end{pmatrix}$$

$K(x) = 0{,}6x^3 - 18x^2 + 380x + 3400$

Probe (in 3 Gruppen für jede Bed.):

$K'(x) = 1{,}8x^2 - 36x + 380$

$K''(x) = 3{,}6x - 36$

I	$3{,}6 \cdot 10 - 36$	$= 0$ ✓
II	$1{,}8 \cdot 100 - 36 \cdot 10 + 380$	$= 200$ ✓
III	$0{,}6 \cdot 1000 - 18 \cdot 100 + 380 \cdot 10 + 3400$	$= 6000$ ✓

$K'''(x) = 3{,}6 \neq 0$

Hausaufgabe 50

Ein Polynom 3. Grades soll einen Tiefpunkt TP($-1|-4\frac{1}{3}$) haben, die y-Achse bei 1 schneiden und außerdem soll x = 2 eine Wendestelle sein. Lösen Sie die Aufgabe im Matrizenkalkül und stellen Sie den Funktionsterm auf.

Lösung: f(x) = .

Aus .

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ & \\ & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ & \\ & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ & \\ & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ & \\ & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ & \\ & \end{array}\right)$$

Übungsaufgabe (Alternative 1): Steckbriefaufgabe

Ein Polynom f(x) soll einen Tiefpunkt TP(-8|-784) haben. Die x-Achse soll bei -1 geschnitten werden. Der Schnittpunkt mit der y-Achse soll um 8 kleiner als der Koeffizient des linearen Gliedes sein.

1. Schritt: Bedingungen in mathematische Gleichungen fassen:

TP(-8|-784)

I $f(-8) = -784$

II $f'(-8) = 0$ (und $f''(-8) > 0$ für TP)

Schnittpunkt mit der x-Achse bei -1:

III $f(-1) = 0$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse soll um 8 kleiner als der Koeffizient des linearen Gliedes sein.

IV $f(0) =$ x-Koeff. - 8

2. Schritt: Ansatz für die gesuchte Funktion: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

3. Schritt: Bedingungen mit der Funktion ausformulieren:

Ableitungen:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 6ax + 2b$

I	$-512a + 64b - 8c + d$	$= -784$
II	$192a - 16b + c$	$= 0$
III	$-a + b - c + d$	$= 0$
IV	d	$= c - 8$

Bed. IV wird eingesetzt in I und III (→ I' und III'):

	$-512a + 64b - 8c + c - 8$	$= -784$
I'	$-512a + 64b - 7c$	$= -776$
II	$192a - 16b + c$	$= 0$
	$-a + b - c + c - 8$	$= 0$
III'	$-a + b$	$= 8$

4. Schritt: Überführen Sie das LGS in Matrixschreibweise und lösen Sie es nach dem Gaußschen Verfahren :

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -512 & 64 & -7 & -776 \\ 192 & -16 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ | \ *(-1) \text{ u. mit 1. Zl. vertauschen} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 192 & -16 & 1 & 0 \\ -512 & 64 & -7 & -776 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 176 & 1 & 1536 \\ 0 & -448 & -7 & -4872 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1/176 & 8\ \ 8/11 \\ 0 & 0 & -4\ \ 5/11 & -962\ \ 2/11 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 7{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 216 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 7{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 216 \end{array}\right)$$

$a = -0{,}5$; $b = 7{,}5$; $c = 216$

Aus IV ergibt sich d:

$d = c - 8 = 216 - 8 = 208$

Lösungsvektor:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 7{,}5 \\ 216 \\ 208 \end{pmatrix}$$

$f(x) = -{}^{1}/_{2}x^3 + 7{,}5x^2 + 216x + 208$

Probe der ursprünglichen Bedingungen I…III in 3 Gruppen.

Übungsaufgabe (Alternative 2): Buch S. 514 Bsp. 7.24a

In einem Betrieb werden 3 verschiedene Teile T_1…T_3 von 3 Maschinen M_1…M_3 bearbeitet. Die Belegungszeiten der Maschinen in Minuten sind in der nebenstehenden Tabelle angegeben. Die für die Bearbeitung der Teile zur Verfügung stehenden Zeiten pro Woche betragen bei der 1. Maschine 9000 Minuten, bei der 2. Maschine 5200 Minuten und bei der 3. Maschine 5100 Minuten.

	T_1	T_2	T_3
M_1	2	8	6
M_2	4	6	1
M_3	7	0	2

Stellen Sie ein LGS auf, dessen Lösung angibt, wie viele Teile bei Ausnutzung der zur Verfügung gestellten Zeit bearbeitet werden können. Lösen Sie das LGS im Matrizenkalkül.

Bezeichnung der Teile, die produziert werden können: t_1, t_2, t_3.

$$\begin{aligned} 2t_1 + 8t_2 + 6t_3 &= 9000 \\ 4t_1 + 6t_2 + t_3 &= 5200 \\ 7t_1 + 2t_3 &= 5100 \end{aligned}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & | & 9000 \\ 4 & 6 & 1 & | & 5200 \\ 7 & 0 & 2 & | & 5100 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} | : 2 \\ \\ \\ \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 4500 \\ 0 & -10 & -11 & | & -12800 \\ 0 & -28 & -19 & | & -26400 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} | *(-4) + 2.\ \text{Zl.}\ | *(-7) + 3.\ \text{Zl.} \\ | :(-10) \\ \\ \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 4500 \\ 0 & 1 & 1{,}1 & | & 1280 \\ 0 & 0 & 11{,}8 & | & 9440 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \\ | *28 + 3.\ \text{Zl.} \\ | :11{,}8 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 4500 \\ 0 & 1 & 0 & | & 400 \\ 0 & 0 & 1 & | & 800 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & 2100 \\ 0 & 1 & 0 & | & 400 \\ 0 & 0 & 1 & | & 800 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 500 \\ 0 & 1 & 0 & | & 400 \\ 0 & 0 & 1 & | & 800 \end{pmatrix}$$

Lösung: $t_1=500$; $t_2 = 400$ und $t_3 = 800$.

Als Vektor geschrieben lautet die Lösung:

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 400 \\ 800 \end{pmatrix}$$

Probe machen.

Übungsaufgabe: Buch S. 522 Nr. 12

Ute, Heinrich, Renate und Arne haben zu einer Party eingeladen. Da sie sich nicht abgesprochen hatten, wer für die Getränke sorgen sollte, kauften sie unabhängig voneinander Bier, Mineralwasser, Saft und Cola ein, zufällig auch jeweils von derselben Marke. Die Anzahl der Kästen, die von den 4 Personen besorgt wurden, stehen in der Tabelle.

	Bier	Wasser	Saft	Cola
Ute	3	1	3	1
Heinr.	3	1	2	1
Renate	2	1	2	2
Arne	5	1	1	1

Bei der Abrechnung der Getränkekosten stellten sie fest, dass der Kassenbon nur den Endbetrag auswies. Ute bezahlte 52,50 €, Heinrich 47,50 €, Renate 44 € und Arne 61,50 €. Ermitteln Sie jeweils die Preise für einen Kasten von jeder Getränkesorte.

Lösung:

LGS: $A \cdot \vec{g} = \vec{p}$ oder ausführlich geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B \\ W \\ S \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52{,}50 \\ 47{,}50 \\ 44{,}00 \\ 61{,}50 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 3 & 1 & 52{,}50 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 47{,}50 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 44 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 61{,}50 \end{array}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\ :3 \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & {}^1/_3 & 1 & {}^1/_3 & 17{,}50 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & {}^1/_3 & 0 & {}^4/_3 & 9 \\ 0 & -{}^2/_3 & -4 & -{}^2/_3 & -26 \end{array}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\ *(-3)+2.\ \text{Zl.},|\ *(-2)+3.\ \text{Zl.},|\ *(-5)+4.\ \text{Zl.} \\ |\ *\ (-1),\ \text{dann vertauschen mit 3. Zl.} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & {}^1/_3 & 1 & {}^1/_3 & 17{,}50 \\ 0 & {}^1/_3 & 0 & {}^4/_3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -{}^2/_3 & -4 & -{}^2/_3 & -26 \end{array}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ |\ *\ 3 \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & {}^1/_3 & 1 & {}^1/_3 & 17{,}50 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -8 \end{array}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ |\ *\ {}^2/_3 + 4.\ \text{Zl.} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & {}^1/_3 & 1 & {}^1/_3 & 17{,}50 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \end{array}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ |\ *\ 4 + 4.\ \text{Zl.} \\ |\ :2 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & {}^1/_3 & 1 & {}^1/_3 & 17{,}50 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Rang(A) = 4 = Rang(A|b), maximal

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & {}^1/_3 & 1 & 0 & 15{,}50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ |\ *(-4) + 2.\ \text{Zl.},\ |\ *(-{}^1/_3) + 1.\ \text{Zl.} \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & {}^1/_3 & 0 & 0 & 10{,}50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ |\ *(-1) + 1.\ \text{Zl.} \\ \\ \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 9{,}50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ |\ *(-{}^1/_3) + 1.\ \text{Zl.} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Bier: 9,50 €; Wasser: 3 €; Saft: 5 €; Cola: 6 €, oder als Vektor:

$\vec{g} = \begin{pmatrix} 9{,}50 \\ 3{,}00 \\ 5{,}00 \\ 6{,}00 \end{pmatrix}$; Probe machen (in 2 Gruppen)

Unter dem Rang der Matrix A, geschrieben Rang(A), wird die Anzahl der vom Nullvektor verschiedenen Zeilenvektoren der Matrix in oberer Dreiecksform verstanden, die aus A nach dem Gaußschen Verfahren entstanden ist (Ende der Phase 1). Entsprechendes gilt auch für die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A\|\vec{b})$, geschrieben $\text{Rang}(A\|\vec{b})$.

Hausaufgabe 51

Lösen Sie das LGS

$$\begin{aligned} 5x + 1\tfrac{1}{4}y + 10z &= 40 \\ -4x - y - 8\tfrac{1}{2}z &= -31\tfrac{1}{4} \\ -2x + 6y + 5\tfrac{1}{2}z &= 12 \end{aligned}$$

im Matrixkalkül.

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

2.5.5 Sonderfälle beim Lösen eines LGS

Übungsaufgabe: LGS mit unendlich vielen Lösungen

Zu lösen ist das LGS

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & 2x & -5y & +z & = 3 \\ \text{II} & -x & +y & +4z & = -3 \\ \text{III} & 2x & & -14z & = 8 \end{array}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & -14 & 8 \end{array}\right) \quad \begin{cases} \mid :2 \\ \\ \\ \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2{,}5 & 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & -1{,}5 & 4{,}5 & -1{,}5 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \end{array}\right) \quad \begin{cases} \mid +2.\ \text{Zl.}, \mid *(-2)+3.\ \text{Zl.} \\ \mid :(-1{,}5) \\ \\ \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2{,}5 & 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} \\ \mid *(-5) + 3.\ \text{Zl.} \\ \\ \end{cases}$$

Rang(A) = Rang(A|b) = 2 < 3

Das LGS ist unterbestimmt, A ist singulär (bisher war A immer regulär).

Das LGS ist nicht eindeutig lösbar, da nicht nach z aufgelöst werden kann. Stattdessen wird nun z als **freier** Parameter gewählt und die beiden anderen Variablen werden durch z ausgedrückt. Es gibt folglich unendlich viele Lösungen, je nach Wahl von z.

Nächster Schritt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2{,}5 & 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} \\ \mid * 2{,}5 + 1.\ \text{Zl.} \\ \\ \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In Gleichungsform:

$$\begin{array}{llllll} \text{I}' & x & & -7z & = 4 & \mid +7z \\ & x & & & = 4 + 7z & \\ \text{II}' & & y & -3z & = 1 & \mid +3z \\ & & y & & = 1 + 3z & \end{array}$$

Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Damit sind jetzt x und y **Funktionen** von z. Sofern für z aus dem Anwendungszusammenhang heraus keine Einschränkungen bekannt sind, können für z alle reellen Zahlen eingesetzt werden und aus den obigen Gleichungen ergeben sich dann entsprechende Werte für x und y. Das LGS hat also unendlich viele Lösungen. Beispiele:

z	x	y
0	4	1
1	11	4
64	452	193
-3	-17	-8

Hausaufgabe 52

Überprüfen Sie (schriftl.), ob das LGS mit diesen Werten erfüllt ist.

Hausaufgabe 53

Lösen Sie das LGS

I	-2a	+ 4b	+ 2c	= -8
II	2a	+ b	+ 8c	= 23
III	-8a	+ 11b	- 2c	= -47

Lösung:

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ & \\ & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ & \\ & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ & \\ & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ & \\ & \end{array}\right)$$

I' $\Rightarrow$ a =.

II' $\Rightarrow$ b =.

Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (\ ) + c \cdot (\ )$

Unendlich viele Lösungen treten immer dann auf, wenn Rang(A) und Rang(A|b) beide gleich, aber nicht maximal sind.

Übungsaufgabe: LGS ohne Lösung

Student Kevin kauft für 3 Parties Kisten Bier, O-Saft und Mineralwasser in folgenden Mengen:

	Bier	O-Saft	Wasser
1. Party	1	2	3
2. Party	2	2	4
3. Party	5	2	7

Nach dem Einkauf notiert er sich zu Hause aus dem Gedächtnis die Preise: 1. Party: 11 €; 2. Party: 14 €; 3. Party: 38 €. Was kosteten die Getränke?

LGS aufstellen:

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & 1B & +2S & +3W & = & 11 \\ \text{II} & 2B & +2S & +4W & = & 14 \\ \text{III} & 5B & +2S & +7W & = & 38 \end{array}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 11 \\ 2 & 2 & 4 & | & 14 \\ 5 & 2 & 7 & | & 38 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 11 \\ 0 & -2 & -2 & | & -8 \\ 0 & -8 & -8 & | & -17 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} | *(-2)+2.\text{ Zl.},| *(-5)+3.\text{ Zl.} \\ | :(-2) \\ \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 11 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \\ | *(8)+3.\text{ Zl.} \\ \end{cases}$$

Die letzte Gleichung lautet nun:

$$\begin{array}{lllll} 0B & +0S & +0W & = & 15 \\ 0 & & & = & 15 \end{array}$$

Die Gleichung ist offenbar falsch. Die 3 Gleichungen widersprechen sich. Das LGS hat keine Lösung. Erkennungsmerkmal:

Rang(A) = 2 (A ist singulär), aber Rang(A|b) = 3 = maximal.

Hausaufgabe 54

Lösen Sie das LGS und geben Sie den Rang an

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & -2x & +4y & +2z & = & -8 \\ \text{II} & 2x & +y & +8z & = & -9 \\ \text{III} & -8x & +11y & -2z & = & -47 \end{array}$$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{c|c} \quad & \\ \quad & \\ \quad & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \quad & \\ \quad & \\ \quad & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \quad & \\ \quad & \\ \quad & \end{array}\right).$$

Übungsaufgabe: Das überbestimmte LGS.

$$\begin{array}{llllll}
\text{I} & a & +\,{}^{1}/_{2}b & & = -2 \\
\text{II} & -1{,}5a & -\,b & -\,c & = 2 \\
\text{III} & & \;\;2b & -\,c & = 8 \\
\text{IV} & 2a & +\,3b & -\,2c & = 4 \\
\text{V} & 4a & +\,5{}^{1}/_{2}b & -\,7c & = 6
\end{array}$$

Das sind 5 Gleichungen für 3 Variablen. Es hätten aber 3 Gleichungen genügt. Man kann das LGS ganz normal lösen, indem man eine 5×3 Koeffizientenmatrix A aufstellt, das ist aber umständlich.

Pragmatische Vorgehensweise: Wir streichen 2 Gleichungen und lösen zuerst 3 Gleichungen mit 3 Variablen. Finden wir eine Lösung, machen wir zum Schluss die Probe in den ausgelassenen Gleichungen. Finden wir keine Lösung, ist das LGS nicht lösbar. Der Fall mit unendlich vielen Lösungen wird nicht vorkommen.

Wir lösen zuerst Gl. I-III und stellen gleich die erweiterte Koeffizienten-matrix auf:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}5 & 0 & -2 \\ -1{,}5 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 8 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} |\ *1{,}5+2.\ \text{Zl.} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & {}^{1}/_{2} & 0 & -2 \\ 0 & -{}^{1}/_{4} & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 8 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ |\ *(-4) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & {}^{1}/_{2} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ |\ *(-2)+3.\ \text{Zl.} \\ |\ :(-9) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & {}^{1}/_{2} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ |\ *(-4)+2.\ \text{Zl.} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \Big\{ | *(-^1/_2)+ 1.\ \text{Zl.}$$

a = -4; b = 4; c = 0

Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Probe:

IV $2(-4) + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 0 = -8 + 12 = 4$ ✓

V $4(-4) + 5^1/_2 \cdot 4 - 7 \cdot 0 = -16 + 22 = 6$ ✓

Damit ist die obige Lösung für alle 5 Gleichungen gültig.

2.5.6 Eigenschaften der Koeffizientenmatrix, Lösbarkeitskriterien

Es sei A die Koeffizientenmatrix und B = $(A|\vec{b})$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines LGS. Am Ende der Phase 1 des Gaußschen Verfahrens sollte A eine obere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen in der Hauptdiagonale sein. Wenn dies gelingt, nennt man A regulär. Das LGS hat dann eine eindeutige Lösung. Gelingt dies nicht, heißt A singulär. Das LGS hat dann entweder keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Hausaufgabe 55

Stellen Sie fest, ob die Matrix regulär oder singulär ist:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 144 \\ -2 & -81 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1{,}5 & 18 \\ 3 & -36 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 27 \\ 5 & -7 & 60 \\ -4 & 6 & 42 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} & \# \\ & \# \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} & \# \\ & \# \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} & & \# \\ & & \# \\ & & \# \end{pmatrix}$

Der Rang ist nützlich zur Entscheidung, ob ein LGS lösbar ist oder nicht. Darüber gibt der nächste Merksatz Auskunft.

Ein LGS mit n Unbekannten $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist nur dann lösbar, wenn Rang(A) = Rang$(A|\vec{b})$ gilt. Die Lösung ist eindeutig, wenn zudem Rang(A) = n gilt. A ist dann regulär. Größer kann der Rang von A nicht sein.

2.6 Die Inverse Matrix

In 2 Gruppen werden die beiden LGS parallel gelöst:

$x_1 + 3x_2 = 1$

$-2x_1 - 2x_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ -2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 4 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -{}^1/_2 \\ 0 & 1 & | & {}^1/_2 \end{pmatrix}$$

$x_1 + 3x_2 = 0$

$-2x_1 - 2x_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ -2 & -2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 4 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -{}^3/_4 \\ 0 & 1 & | & {}^1/_4 \end{pmatrix}$$

In beiden Gruppen wurden die gleichen Rechenoperationen ausgeführt, da diese nur von der Koeffizientenmatrix A abhängen. Die beiden LGS lassen sich gleichzeitig lösen, indem A um **beide** rechte Seiten erweitert wird:

$$(A|\vec{b}_1\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ -2 & -2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das entspricht der Lösung einer Matrizengleichung

$$A\cdot X = E \text{ mit } X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

Die erste Spalte von X ist der Lösungsvektor des linken LGS, die zweite Spalte der des rechten. Ausführlich geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir führen die Lösung jetzt mit $(A|\vec{b}_1\vec{b}_2)$ durch (gleiche Rechnung):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ -2 & -2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 4 & | & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -{}^1/_2 & -{}^3/_4 \\ 0 & 1 & | & {}^1/_2 & {}^1/_4 \end{pmatrix}$$

bzw. als Gleichung geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^1/_2 & -{}^3/_4 \\ {}^1/_2 & {}^1/_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^1/_2 & -{}^3/_4 \\ {}^1/_2 & {}^1/_4 \end{pmatrix} = I$$

$X = I$

Damit haben wir die Gleichung $A\cdot X = E$ aufgelöst nach X (X freigestellt).

Analogon mit Zahlen:

$5x = 1 \qquad | * 5^{-1}$

$5^{-1} \cdot 5x = 5^{-1} \cdot 1 = 5^{-1}$

$x = 5^{-1}$ (= $^{1}/_{5}$ = 0,2, bei Zahlen kann man Dividieren, bei Matrizen nicht!)

Wir machen in 2 Gruppen die Probe:

$I \cdot A =$	$A \cdot I =$
$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

I heißt die inverse Matrix von A und wird A^{-1} geschrieben. Die inverse Matrix löst die Gleichung $A \cdot X = E$ nach X auf.

L. S.: $A^{-1} \cdot A \cdot X = E \cdot X = X$ R. S.: $A^{-1} \cdot E = A^{-1}$

$X = A^{-1}$

Eine inverse Matrix kann nur zu einer regulären, quadratischen Matrix gebildet werden.

Schematische Vorgehensweise:

$$(A \mid E)$$

$$\downarrow$$

Gaußsches Verfahren

$$\downarrow$$

$$(E \mid A^{-1})$$

Hausaufgabe 56

Bilden Sie die inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & 144 \\ -2 & -81 \end{pmatrix}$ (mit Probe)!

Lösung:

$\left(\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & \end{array}\right) \to$

$\left(\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & \end{array}\right) = (E|A^{-1})$.

Probe: ✓.

Zu einer quadratischen Matrix A bilden wir die Inverse A^{-1}, indem wir A nach rechts um eine Einheitsmatrix passender Größe erweitern. Auf diese erweiterte Matrix wenden wir das Gaußsche Verfahren an mit dem Ziel, A zur Einheitsmatrix umzuformen. In der rechten Hälfte ist dann aus der Einheitsmatrix die Inverse von A geworden. Das Verfahren scheitert bei einer singulären Matrix A.

Die Inverse ist nicht nur hilfreich beim Lösen von Matrixgleichungen der vorgestellten Art $A \cdot X = B$, sondern hilft auch, wenn X und B Vektoren sind, wie es bisher bei einem LGS der Fall war.

Übungsaufgabe: Lösen Sie das LGS

$$\begin{array}{llll} \text{I} & x_1 & + 3x_2 & = -8 \\ \text{II} & -2x_1 & - 2x_2 & = -4 \end{array}$$

In Matrixschreibweise:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}; \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Zur Lösung verwenden wir die bereits bekannte inverse Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -{}^1/_2 & -{}^3/_4 \\ {}^1/_2 & {}^1/_4 \end{pmatrix}:$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \qquad | \text{ Klammerung } (A^{-1} \cdot A)$$

$$E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \qquad | \; E \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -{}^1/_2 & -{}^3/_4 \\ {}^1/_2 & {}^1/_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 \\ -4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 7$; $x_2 = -5$

Übungsaufgabe: Zu lösen ist das LGS

$$\begin{array}{llll} \text{I} & x_1 & + 3x_2 & = 21 \\ \text{II} & -2x_1 & - 2x_2 & = 30 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^1/_2 & -{}^3/_4 \\ {}^1/_2 & {}^1/_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 57

Bilden Sie die Inverse zu $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Lösen Sie mit ihrer Hilfe die beiden LGS

$$\begin{array}{llll} \text{I} & 4x & + 2y & = 35 \end{array}$$

II $3x + -2y = 42$ und

I $4x + 2y = 63$

II $3x + -2y = 84$.

Lösung (s. HA60_Inverse.dfw):

$A^{-1} = \begin{pmatrix} & \# \\ & \# \end{pmatrix}$, LGS1: x= , y= ; LGS2: x=; y= .

Eine Matrix I heißt die zu A inverse Matrix, wenn gilt $I \cdot A = E$ und ebenso $A \cdot I = E$. A, I und E sind dabei formgleiche quadratische Matrizen. Für I schreibt man dann auch A^{-1}. Für nicht quadratische Matrizen ist die Inverse nicht definiert. Ist A quadratisch und invertierbar, so lässt sich die Lösung der Matrizengleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ durch Multiplikation mit A^{-1} von links eindeutig bestimmen: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$.

Übungsaufgabe: (Buch S. 532 Bsp. 7.30)

In einem Betrieb werden aus den 3 Materialien $M_{1/2/3}$ die 3 Produkte $P_{1/2/3}$ gemäß nebenstehender Stückliste hergestellt. Wegen eines Programmabsturzes in der EDV Anlage können die wöchentlichen Produktionsmengen nur noch über den Materialverbrauch errechnet werden. Die laut Materialentnahmeschein dem Lager entnommenen ME in den letzten 4 Wochen sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

	P_1	P_2	P_3
M_1	2	2	2
M_2	0	2	2
M_3	8	4	8

Ermitteln Sie, wie viele ME von den Produkten $P_{1/2/3}$ in den jeweiligen Wochen hergestellt worden sind.

	1. Wo.	2. Wo.	3. Wo.	4. Wo.
M_1	2400	2140	2420	2440
M_2	1600	1240	1420	1400
M_3	8000	7360	8480	8640

Lösung:

Es sind 4 LGS zu lösen, die sich lediglich in der rechten Seite unterscheiden. Für die 1. Woche z. B.:

I $2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 2400$

II $2p_2 + 2p_3 = 1600$

III $8p_1 + 4p_2 + 8p_3 = 8000$

Hier lohnt es sich, zuerst die Inverse zu berechnen, um dann damit die 4 LGS zu lösen (in 4 Gruppen).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1,5 & -0,5 & -0,25 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0,5 & 0,25 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0,5 & -0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0,5 & 0,25 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0 \\ 1 & 0 & -0,25 \\ -1 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Lösung für 1. Woche: $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = A^{-1} * \begin{pmatrix} 2400 \\ 1600 \\ 8000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix}$

Lösung für 2. Woche: $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = A^{-1} * \begin{pmatrix} 2140 \\ 1240 \\ 7360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 300 \\ 320 \end{pmatrix}$

Lösung für 3. Woche: $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = A^{-1} * \begin{pmatrix} 2420 \\ 1420 \\ 8480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 410 \end{pmatrix}$

Lösung für 4. Woche: $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = A^{-1} * \begin{pmatrix} 2440 \\ 1400 \\ 8640 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 520 \\ 280 \\ 420 \end{pmatrix}$

Zusammenhang mit dem Rang und Übersicht (Buch S. 547):

$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit n Variablen

$Rg(A) < Rg(A|\vec{b})$

keine Lösung

A ist singulär

$Rg(A) = Rg(A|\vec{b})$

LGS ist lösbar

$Rg(A) = n$

eine Lösg.
A ist regulär
und invertierbar

$Rg(A) < n$

unendlich
viele Lösungen
A ist singulär

2.7 Übergangsmatrizen

Viele Vorgänge in der wirklichen Welt verändern sich in der Zeit nicht stetig, sondern in Schüben. Dazwischen herrscht dann ein Zustand relativer Ruhe. Ein gutes Beispiel dafür sind die Wahlen eines Parlaments. An einem Stichtag wird gewählt. Dadurch ergeben sich die neue Stimmenverteilung auf die teilnehmenden Parteien (und daraus durch ein relativ kompliziertes Verfahren, auf das hier nicht näher eingegengen werden soll, die Sitzverteilung im Parlament). Danach bleibt diese Stimmenverteilung 4 Jahre lang so bestehen bis zum nächsten Wahltag usw. Mit Matrizen kann man den Übergang von einem Zustand zum nächsten gut beschreiben. Daher der Name Übergangsmatrizen.

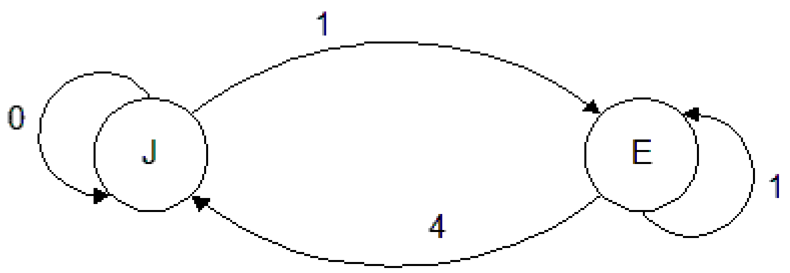
Andere Beispiele finden sich in der Entwicklung von Populationen. Auch wenn hier im Laufe der Zeit tatsächlich eine gewisse Verwischung stattfindet, können wir gedanklich so tun, als ob sich die Population in Generationen einer festen Dauer fortentwickeln würde.

Bsp. 1: Entwicklung einer Mäusepopulation

Ein neugeborenes Mäusepaar ist nach 6 Wochen geschlechtsreif und bringt 4 neue Mäusepaare zur Welt, 4 männliche und 4 weibliche Tiere. Sofern keine Umweltfaktoren diese Fortpflanzungsregeln stören, lässt sich mit Hilfe von Matrizen berechnen, wie viele Tiere (Paare) nach einer bestimmten Zeit (als Vielfache von 6 Wochen) existieren, wenn die anfängliche Population gegeben ist.

Ermitteln Sie die Größe der Population nach 6, 12, 18 und 24 Wochen, wenn am Anfang ein erwachsenes Mäusepaar (Adam und Eva) existiert.

Die Fortpflanzungsregel kann man als Graph veranschaulichen, der die Zustände als Kreise und die Übergänge zwischen ihnen als Pfeile darstellt. Die Zahlen an den Pfeilen geben die Änderungen an, wenn ein Zustand in den nächsten wechselt.



J = Jungtierpaar, E = Erwachsenentierpaar (fortpflanzungsfähig)

Der Tod kommt in diesem einfachen Modell nicht vor. Aus dem Graphen leiten wir folgende Übergangstabelle ab:

Im Gegensatz zu den bisherigen Tabellen ist bei Übergangsmatrizen „von" immer oben! Aus der Tabelle gewinnen wir dann leicht die Übergangsmatrix A:

	von diesem Zustand		
nach diesem Zustand		J	E
	J	0	4
	E	1	1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Zustände werden durch Spaltenvektoren dargestellt: $\vec{z} = \begin{pmatrix} J \\ E \end{pmatrix}$

Der Anfangszustand in diesem Beispiel ist also

$$\vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nach 6 Wochen hat das erwachsene Paar 8 Junge geworfen (4 Paare), wir haben dann 4 J und weiterhin 1 E:

$$\vec{z}_1 = A \cdot \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nach weiteren 6 Wochen sind aus den 4 Jungtierpaaren 4 Erwachsene geworden, also insgesamt 5 E. Das erwachsene Paar hat wieder 4 junge Paare zur Welt gebracht, also gibt es wieder 4 J:

$$\vec{z}_2 = A \cdot \vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(nach 12 Wochen)}$$

Da $\vec{z}_1 = A \cdot \vec{z}_0$, könnten wir auch schreiben $\vec{z}_2 = A^2 \cdot \vec{z}_0$.

Wieder 6 Wochen später sind die 4 Jungtiere erwachsen geworden, es gibt dann also 9 E. Die 5 Erwachsenen haben je 4 Jungtierpaare zur Welt gebracht, also 20 Paare J.

$$\vec{z}_3 = A \cdot \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \text{(nach 18 Wochen)}$$

Da $\vec{z}_2 = A^2 \cdot \vec{z}_0$, könnten wir auch schreiben $\vec{z}_3 = A^3 \cdot \vec{z}_0$.

Nach 24 Wochen gibt es dann 29 Erwachsene und 9·4 Jungtierpaare:

$$\vec{z}_4 = A \cdot \vec{z}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 29 \end{pmatrix} = A^4 \cdot \vec{z}_0 \quad \text{(nach 24 Wochen)}$$

usw. usw.

Allgemein ergibt sich offenbar

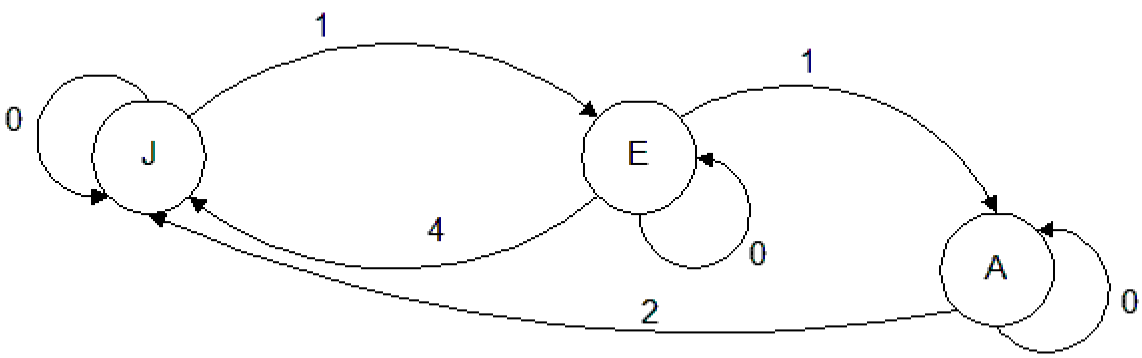
$\vec{z}_n = A^n \cdot \vec{z}_0$.

Viele Vorgänge laufen in der realen Welt in Schüben ab. Auch wenn sich solch ein Schub in Wirklichkeit über einen gewissen Zeitraum erstrecken kann, legen wir ihn zum Zwecke einer einfachen mathematischen Beschreibung auf einen Zeitpunkt fest. Nach einem solchen Schub wird dann ein gleichbleibender Zustand angenommen, der durch einen Zustandsvektor beschrieben wird. Nach einer gewissen Zeit (Übergangszeit, Generationenzeit) setzt dann ein neuer Schub ein, der zu einem veränderten Zustand führt usw. Die Schübe werden durch Übergangsmatrizen dargestellt. Zur Beschreibung des Prozesses muss ein Anfangszustand $\vec{z}_0$ vorgegeben werden. Spätere Zustandsvektoren erhält man dann durch Multiplikation mit der Übergangsmatrix von links:

$\vec{z}_1 = A \cdot \vec{z}_0$, $\vec{z}_2 = A \cdot \vec{z}_1$ usw.

Hausaufgabe 58

Das Modell der Mäusepopulation wird nun verfeinert und durch folgenden Graphen beschrieben (A = Alttiere):



Erstellen Sie aus dem Graphen die Übergangsmatrix und berechnen Sie die ersten 4 Generationen, ausgehend vom Startvektor $\vec{z}_0 = \begin{pmatrix} J \\ E \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung (s. Bsp7-53b-Mäuse.xls, Tabelle2):

Tab.:

Übergangsmatrix

	J	E	A
J			
E			
A			

Generationen: (Folie auflegen)

Gen.	J	E	A	Summe
1				1
2				5
3				6
4				22
5				34

2.7.1 Stochastische Matrizen

Bsp. 2: In einem Land mit 3 politischen Parteien A, B und C soll gewählt werden. Analysen der vergangenen Wahlen haben ergeben, dass die Wähler ein bestimmtes Wechselverhalten zeigen, das in der Tabelle zusammengefasst ist.

		von der Partei ... wechseln			
nach dieser Partei		A	B	C	Anzahl der Wähler (Mio.)
	A	0,85	0,10	0,05	16
	B	0,10	0,80	0,05	16
	C	0,05	0,10	0,90	8

Es soll angenommen werden, dass das Wahlverhalten und die Gesamtzahl der Wahlberechtigten (40 Mio.) konstant bleiben. Das Ergebnis der letzten Wahl war: 40% stimmten für Partei A, 40% für Partei B und 20% für Partei C. Wie werden die nächsten 3 Wahlen ausgehen?

In der Tabelle sind die Zahlen Stimmenanteile der Parteien, sie können nicht negativ werden. Außerdem müssen die Spaltensummen immer 1 ergeben. Diese Eigenschaften übertragen sich auf die Übergangsmatrix:

$$S = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}80 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{pmatrix}$$

Eine Übergangsmatrix mit diesen Eigenschaften nennt man **stochastische Matrix**.

Die nächsten 3 Wahlergebnisse werden in Mio. Stimmen gerechnet.

Startvektor: $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_1 = S \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 15{,}6 \\ 14{,}8 \\ 9{,}6 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 39\% \\ 37\% \\ 24\% \end{pmatrix}$

$\vec{v}_2 = S \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 15{,}22 \\ 13{,}88 \\ 10{,}9 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 38{,}05\% \\ 34{,}7\% \\ 27{,}25\% \end{pmatrix}$

$\vec{v}_3 = S \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 14{,}87 \\ 13{,}171 \\ 11{,}959 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 37{,}175\% \\ 32{,}9275\% \\ 29{,}8975\% \end{pmatrix}$

Die Aneinanderreihung der Ergebnisse aus der wiederholten Anwendung einer stochastischen Matrix auf einen Zustandsvektor nennt man eine **Markov-Kette**. Sie hat ihren Namen von dem russischen Mathematiker Andrei Andrejewitsch Markow (1856 - 1922).

Folie Wahlen (Bsp7-54-Wahlen.xls)

Hausaufgabe 59

Zeichnen Sie den Graphen zu der Tabelle des Wählerverhaltens!
(ohne Lösung)

2.7.2 Fixvektoren

Gibt es einen Grenzvektor, auf den sich die Zustände hin entwickeln (sich „einpendeln“)? Ein solcher Vektor $\vec{v}_G$ würde sich dann ständig wiederholen.

Wir versuchen den Ansatz:

$S \cdot \vec{v}_G = \vec{v}_G \qquad | - \vec{v}_G$

$S \cdot \vec{v}_G - \vec{v}_G = \vec{O}$

$S \cdot \vec{v}_G - E \cdot \vec{v}_G = \vec{O}$

$(S - E) \cdot \vec{v}_G = \vec{O}$

Das ist ein homogenes LGS (rechte Seite = Null). Die triviale Lösung ist

$v_A = v_B = v_C = 0.$

Daran ist man meistens nicht interessiert. Gibt es noch weitere Lösungen?

$$S\text{-}E = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}80 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}15 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & -0{,}2 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & -0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}15 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & -0{,}2 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & -0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}_G = \vec{O}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} -0{,}15 & 0{,}10 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}10 & -0{,}2 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & -0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung wie immer nach dem Gaußschen Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 1 & -^2/_3 & -^1/_3 & 0 \\ 0 & -^2/_{15} & ^1/_{12} & 0 \\ 0 & ^2/_{15} & -^1/_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -^2/_3 & -^1/_3 & 0 \\ 0 & 1 & -^5/_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Rg(A) = Rg(A|b) = 2 < 3 \Rightarrow$ es gibt unendlich viele Lösungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -^3/_4 & 0 \\ 0 & 1 & -^5/_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_{C,G}$ dient als freier Parameter.

$v_{B,G} - {}^5/_8 \cdot v_{C,G} = 0 \Rightarrow \quad v_{B,G} = {}^5/_8 \cdot v_{C,G}$

$v_{A,G} - {}^3/_4 \cdot v_{C,G} = 0 \Rightarrow \quad v_{A,G} = {}^3/_4 \cdot v_{C,G}$

Nebenbedingung: $v_{A,G} + v_{B,G} + v_{C,G} = 40$

${}^3/_4 \cdot v_{C,G} + {}^5/_8 \cdot v_{C,G} + v_{C,G} = 40$

$({}^3/_4 + {}^5/_8 + 1) \cdot v_{C,G} = 40$

$2\,{}^3/_8 \cdot v_{C,G} = 40 \Rightarrow$

$v_{C,G} = 40/2\,{}^3/_8 = 16\,{}^{16}/_{19} \approx 16{,}842$ (Mio. Stimmen) $\hat{=}$ 42,1%

$v_{B,G} = {}^5/_8 \cdot 16\,{}^{16}/_{19} = 10\,{}^{10}/_{19} \approx 10{,}526 \;\hat{=}$ 26,3%

$v_{A,G} = {}^3/_4 \cdot 16\,{}^{16}/_{19} = 12\,{}^{12}/_{19} \approx 12{,}632 \;\hat{=}$ 31,6%

Der Vektor $\vec{v}_G = \begin{pmatrix} 12\,{}^{12}/_{19} \\ 10\,{}^{10}/_{19} \\ 16\,{}^{16}/_{19} \end{pmatrix}$ heißt Fixvektor (der Matrix S).

Probe:

$$\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}80 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12\,{}^{12}/_{19} \\ 10\,{}^{10}/_{19} \\ 16\,{}^{16}/_{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\,{}^{12}/_{19} \\ 10\,{}^{10}/_{19} \\ 16\,{}^{16}/_{19} \end{pmatrix} \checkmark$$

Hausaufgabe 60

Bestimmen Sie den Fixvektor, wenn das Wählerverhalten durch die Übergangsmatrix $S = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}15 & 0{,}90 & 0{,}1 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}60 \end{pmatrix}$ beschrieben wird. Der Ausgang der letzten Wahl war: A bekam 30 Mio. Stimmen, B und C jeweils 25 Mio. Stimmen.

Lösung (s. HA64_Wahlen.xls):

$v_{A,G} = \cdot v_{C,G}$; $v_{B,G} = \cdot v_{C,G}$ und bei 80 Mio. Stimmen ist
$v_{C,G} =$; $v_{A,G} =$ und $v_{B,G} =$.

Weiteres Beispiel: Buch S. 566 Bsp. 7.55

Eine Kleinstadt im Münsterland stellt der Bevölkerung 500 Fahrräder an 3 Einstellplätzen zur Verfügung: am Bahnhof (B), am Rathaus (R) und am Rand der Fußgängerzone (F). Die Räder müssen am Tag der Ausleihe spätestens bis 22:00 Uhr wieder an einem der Standorte B, R oder F abgestellt werden.

Nach einem Monat stellt man fest, dass viele Räder täglich ihren Standort wechseln u. z. immer nach demselben Schema. Von den am Bahnhof entliehenen Rädern werden 5% am Rathaus und 25% in der Fußgängerzone abgestellt. Von den am Rathaus entliehenen Rädern werden 30% am Bahnhof und 20% an der Fußgängerzone zurückgestellt. Von den an der Fußgängerzone entliehenen Rädern werden jeweils 10% am Bahnhof und am Rathaus zurückgestellt.

Der städtische Mathematiker erhält nun den Auftrag, auf der Grundlage dieses Verhaltens die Räder so deponieren zu lassen, dass am nächsten Tag an denselben Stellen jeweils dieselbe Anzahl zur Verfügung steht.

Übergangsgraph an der Tafel erstellen.

Bedingung für Fixvektor: $S\cdot\vec{v} = \vec{v}$ bzw ausführlich

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}50 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}20 & 0{,}80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_B \\ f_R \\ f_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_B \\ f_R \\ f_F \end{pmatrix}$$

$(S - E)\cdot\vec{v} = \vec{O}$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}05 & -0{,}50 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}20 & -0{,}2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -{}^1/_3 & 0 \\ 0 & -0{,}45 & {}^7/_{60} & 0 \\ 0 & 0{,}45 & -{}^7/_{60} & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -^1/_3 & 0 \\ 0 & 1 & -^7/_{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -^{16}/_{27} & 0 \\ 0 & 1 & -^7/_{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

f_F dient als freier Parameter.

$f_B = {}^{16}/_{27} f_F$; $f_R = {}^7/_{27} f_F$

Nebenbedingung: $f_B + f_R + f_F = 500$

$({}^{16}/_{27} + {}^7/_{27} + 1) f_F = {}^{50}/_{27} f_F = 500 \Rightarrow f_F = 500 \cdot {}^{27}/_{50} = 270$

$f_B = {}^{16}/_{27} \cdot 270 = 160$

$f_R = {}^7/_{27} \cdot 270 = 70$

Lösungsvektor:

$$\begin{pmatrix} f_B \\ f_R \\ f_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 70 \\ 270 \end{pmatrix}$$

Probe machen!!!

Übungsaufgabe: Angenommen, an einem Tag finden wir abends 190 Räder am Bahnhof, 105 Räder am Rathaus und 205 Räder am Rand der Fußgängerzone. Wie waren die Fahrräder gestern abend verteilt?

Lösung: Die Matrix S liefert die Entwicklung von gestern (Zustand n-1) auf heute:
$\vec{f}_n = S \cdot \vec{f}_{n-1}$

Auflösen nach $\vec{f}_{n-1}$:
$S^{-1} \cdot \vec{f}_n = S^{-1} \cdot S \cdot \vec{f}_{n-1} = E \cdot \vec{f}_{n-1} = \vec{f}_{n-1}$

Inverse bilden:

0,7	0,3	0,1	1	0	0
0,05	0,5	0,1	0	1	0
0,25	0,2	0,8	0	0	1

1	3/7	1/7	1 3/7	0	0
0	67/140	13/140	- 1/14	1	0
0	13/140	107/140	- 5/14	0	1

1	3/7	1/7	1 3/7	0	0
0	1	13/67	- 10/67	2 6/67	0
0	0	50/67	- 23/67	- 13/67	1

1	3/7	0	1 173/350	13/350	- 67/350
0	1	0	- 3/50	2 7/50	- 13/50
0	0	1	- 23/50	- 13/50	1 17/50

1	0	0	1 13/25	- 22/25	- 2/25
0	1	0	- 3/50	2 7/50	- 13/50
0	0	1	- 23/50	- 13/50	1 17/50

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1\,^{13}/_{25} & -^{22}/_{25} & -^{2}/_{25} \\ -^{3}/_{50} & 2\,^{7}/_{50} & -^{13}/_{50} \\ -^{23}/_{50} & -^{13}/_{50} & 1\,^{17}/_{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}52 & -0{,}88 & -0{,}08 \\ -0{,}06 & 2{,}14 & -0{,}26 \\ -0{,}46 & -0{,}26 & 1{,}34 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 190 \\ 105 \\ 205 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 160 \\ 160 \end{pmatrix} \qquad \text{Summe: } 500$$

Gestern abend standen also 180 Räder am Bahnhof, je 160 am Rathaus und am Rand der Fußgängerzone.

Übergangsmatrizen sind quadratische Matrizen, die den Übergang von einem Zustand in den nächsten erfassen. Die Zustände selbst werden durch entsprechend angeordnete Zustandsvektoren dargestellt. Die Zeit kommt in dieser Matrixdarstellung nicht explizit zum Ausdruck.

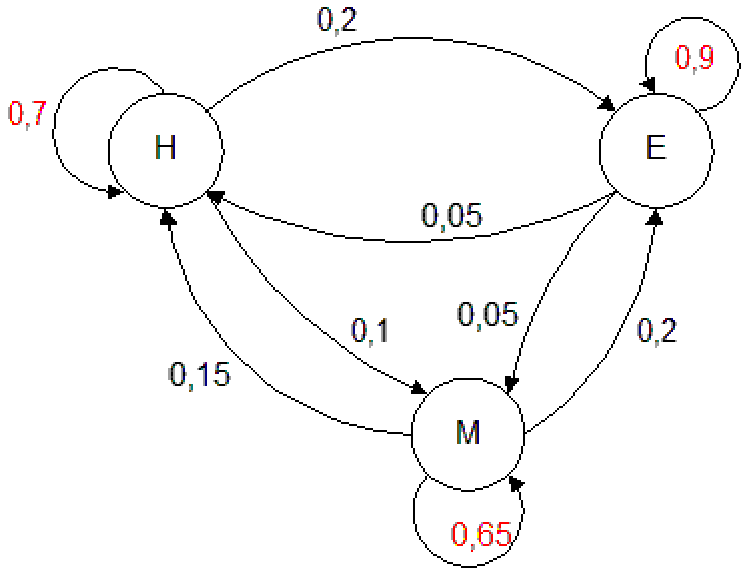
Stochastische Matrizen sind spezielle Übergangsmatrizen, die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen verschiedenen Zuständen beschreiben. Ihre Elemente sind daher Zahlen zwischen 0 und 1, beide einschließlich, und jede Spaltensumme ist 1.

Wird die stochastische Matrix S wiederholt mit einem Zustandsvektor $\vec{v}$ multipliziert, so strebt die Folge $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$... gegen einen Grenzvektor $\vec{v}_G$, der sich dann nicht mehr ändert. Daher wird $\vec{v}_G$ auch <u>Fixvektor</u> genannt. Man bestimmt ihn durch Lösen des LGS $(S-E)\cdot\vec{v}_G = \vec{O}$.

Beispiel: Autovermietung (Buch S. 567 „Alles klar?")

Eine Autovermietung unterhält Geschäftsstellen in Hamburg, Essen und München. Aus Erfahrung weiß man, dass die Autos wöchentlich von Standort zu Standort wandern wie es folgender Übergangsgraph zeigt:

Die roten Zahlen werden nicht mit angeschrieben!



Am Freitag Abend der 30. KW befinden sich 90 Wagen in Hamburg, 70 in Essen und 110 in München.

a) Wie ist die Situation eine bzw. zwei Wochen später?

b) Wie viele Autos verlassen Hamburg in den ersten beiden Wochen Richtung Essen?

c) Wie viele Autos verlassen München in den ersten beiden Wochen?

d) Wie sollte man die Autos stationieren, damit sie in der nächsten Woche wieder so stehen wie vorher?

Lösung s. ÜA_Autovermietung2.xls

Inhaltsverzeichnis

1 Erweiterung der Analysis I 1

1.1 Kurvenscharen 1

1.1.1 Einleitendes Beispiel 1

1.1.2 Zweites Beispiel mit Parameter im linearen Glied 5

1.1.3 Kurvendiskussion mit einer Scharfunktion 7

1.1.4 Kurvendiskussion mit einer kubischen Parabel 11

1.1.5 Kostenfunktion mit Parameter 13

1.2 Integralrechnung 17

1.2.1 Mittelwert einer Funktion 17

1.2.2 Volumen eines Rotationskörpers 20

1.3 Die Exponentialfunktion 25

1.3.1 Einleitendes Beispiel: Zinseszinsrechnung 25

1.3.2 Die allgemeine Exponentialfunktion 26

1.3.3 Die besonderen Basen 10 und e 29

1.4 Die Logarithmus-Funktion 31

1.4.1 Anwendung auf die einfache Exponentialfunktionen 32

1.4.2 Anwendung auf die allg. Exponentialfunktion 33

1.5 Die e-Funktion 34

1.5.1 Die Umkehrfunktion ln(x) 35

1.5.2 Die Ableitung der e-Funktion 36

1.5.3 Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion 40

1.5.4 Integral der allgemeinen Exponentialfunktion 42

1.6 Begrenztes Wachstum/begrenzte Abnahme 44

1.7 Anwendungen der Exponentialfunktion 47

1.7.1 Die logistische Funktion 47

2 Lineare Algebra 50

2.1 Einführung der Matrizen 50

2.1.1 Beispiel A: Transportmatrix 50

2.1.2 Beispiel B: Herstellungsmatrix 51

2.1.3 Beispiel C: Input-Output-Matrix. 51

2.1.4 Beispiel D: Koeffizientenmatrix 53

2.2 Zusammenfassung der Beispiele 53

2.3 Vektoren und weitere Definitionen 53
2.4 Matrizenverknüpfungen 55
2.4.1 Addition und Subtraktion..55
2.4.2 Die S-Multiplikation 56
2.4.3 Das Skalarprodukt zweier Vektoren 57
2.4.4 Matrix mal Vektor 59
2.4.5 Vektor mal Matrix 61
2.4.6 Matrix mal Matrix 62
2.5 Anwendungen der Matrixrechnung 67
2.5.1 Kostenrechnung 67
2.5.2 Deckungsbeitrag 69
2.5.3 Lineare Gleichungssysteme 71
2.5.4 Übungsaufgaben zu LGS 75
2.5.5 Sonderfälle beim Lösen eines LGS 83
2.5.6 Eigenschaften der Koeffizientenmatrix, Lösbarkeitskriterien.....87
2.6 Die Inverse Matrix 88
2.7 Übergangsmatrizen..93
2.7.1 Stochastische Matrizen 96
2.7.2 Fixvektoren 97
2.8 Die transponierte Matrix 105
2.9 Das Leontief-Modell 106
2.9.1 Vorstellung des Modells..106
2.9.2 Die Inputmatrix 107
2.9.3 Berechnung des gesamten Inputs 109
2.9.4 Berechnung des Konsums bei gegebener Gesamtproduktion..110
2.9.5 Berechnung der Gesamtproduktion bei gegebenem Konsum..112